

Programação Funcional EI

Lic. Engenharia Informática - 1º Ano

2009 / 2010

Maria João Frade (mjf@di.uminho.pt)

Departamento de Informática
Universidade do Minho

1

Exemplo: A função factorial é descrita matematicamente por

$$0! = 1$$
$$n! = n * (n-1)! , \text{ se } n > 0$$

Dois programas que fazem o cálculo do factorial de um número, implementados em:

C

```
int factorial(int n)
{ int i, r;

  i=1;
  r=1;
  while (i<=n) {
    r=r*i;
    i=i+1;
  }
  return r;
}
```

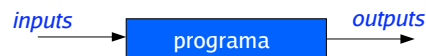
Haskell

```
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)
```

Qual é mais fácil de entender ?

3

Um **programa** pode ser visto como algo que transforma informação



Existem 2 grandes classes de linguagens de programação:

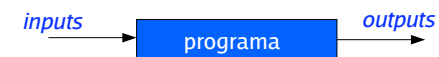
Imperativas - um programa é uma sequência de instruções (ou seja de “ordens”).
(ex: Pascal, C, Java, ...)

- difícil estabelecer uma relação precisa entre o input e o output e de raciocinar sobre os programas; ...
- + normalmente mais eficientes; ...

Declarativas - um programa é um conjunto de declarações que descrevem a relação entre o input e o output. (ex: Prolog, ML, Haskell, ...)

- + fácil de estabelecer uma relação precisa entre o input e o output e de raciocinar sobre os programas; ...
- normalmente menos eficientes (mas cada vez mais); ...

2



Na programação (funcional) faremos uma distinção clara entre três grandes grupos de conceitos:

Dados – Que tipo de informação é recebida e como ela se pode organizar por forma a ser processada de forma eficiente.

Operações – Os mecanismos para manipular os dados. As operações básicas e como construir novas operações a partir de outras já existentes.

Cálculo – A forma como o processo de cálculo decorre.

A linguagem **Haskell** fornece uma forma rigorosa e precisa de descrever tudo isto.

4

Programa Resumido

Nesta disciplina estuda-se o paradigma funcional de programação, tendo por base a linguagem de programação **Haskell**.

- Programação funcional em Haskell.
 - **Conceitos fundamentais**: expressões, tipos, redução, funções e recursividade.
 - **Conceitos avançados**: funções de ordem superior, polimorfismo, tipos indutivos, classes, modularidade e monades.
- Estruturas de dados e algoritmos.
- Tipos abstractos de dados.

5

Programação Funcional EI

5 ECTS = **140 horas de trabalho**
(**80 horas de trabalho independente**)

Semanalmente:

- 2 aulas teóricas
- 1 aula teórico-prática

7

Bibliografia

- **Fundamentos da Computação, Livro II: Programação Funcional**. José Manuel Valença e José Bernardo Barros. Universidade Aberta, 1999.
- **Introduction to Functional Programming using Haskell**. Richard Bird. Prentice-Hall, 1998.
- **Haskell: the craft of functional programming**. Simon Thompson. Addison-Wesley.
- **A Gentle Introduction to Haskell**. Paul Hudak, John Peterson and Joseph Fasel.
- **Apontamentos da aulas teóricas e fichas práticas**.

Disponíveis em www.di.uminho.pt/~mjf/PFei/2008-09

Acessíveis a partir de lei.di.uminho.pt

6

CrITÉrios de Avaliação

Os alunos terão que optar por um dos seguintes métodos de avaliação:

Método A:

- Prova individual escrita, com nota mínima de 8 valores (70%).
- Avaliação Teórico-Prática (30%). Esta avaliação é feita através de questões para responder na aula e da participação do aluno.

Método B:

- Prova individual escrita, com nota mínima de 10 valores (100%).

A escolha do método de avaliação deverá ser efectuada até ao final da 3ª semana de aulas.

Essa escolha deve ser indicada ao docente do turno TP a que pertence, que ficará com a responsabilidade a sua avaliação TP.

8

O Paradigma Funcional de Programação

Haskell

```
fact 0 = 1
fact n = n * fact (n-1)
```

As equações que são usadas na definição da função `fact` são **equações matemáticas**. Elas indicam que o lado esquerdo e direito têm o mesmo valor.

C

```
int factorial(int n)
{ int i, r;
  i=1;
  r=1;
  while (i<=n) {
    r=r*i;
    i=i+1;
  }
  return r;
}
```

Isto é muito diferente do uso do `=` nas linguagens imperativas.

Por exemplo, a instrução `i=i+1` representa uma **atribuição** (o valor anterior de `i` é destruído, e o novo valor passa a ser o valor anterior mais 1). Portanto `i` é redefinido.

Porque `=` em Haskell significa **“é, por definição, igual a”**, e não é possível redefinir, o que fazemos é raciocinar sobre equações matemáticas. É, portanto, muito mais fácil do que raciocinar sobre programas funcionais do que sobre programas imperativos.

9

- A um conjunto de associações *nome-valor* dá-se o nome de **ambiente** ou **contexto** (ou *programa*).
- As expressões são avaliadas no âmbito de um contexto e podem conter ocorrências dos nomes definidos nesse contexto.
- O interpretador usa as **definições** que tem no contexto (programa) como **regras de cálculo**, para simplificar (calcular) o valor de uma expressão.

Exemplo: Este programa define três funções de conversão de temperaturas.

```
celFar c = c * 1.8 + 32
kelCel k = k - 273
kelFar k = celFar (kelCel k)
```

No interpretador ...

```
> kelFar 300
80.6
```

É calculado pelas regras estabelecidas pelas definições fornecidas pelo programa.

```
kelFar 300 ⇨ celFar (kelCel 300)
              ⇨ (kelCel 300) * 1.8 + 32
              ⇨ (300 - 273) * 1.8 + 32
              ⇨ 27 * 1.8 + 32
              ⇨ 80.6
```

11

O Paradigma Funcional de Programação

- Um **programa** é um conjunto de definições.
- Uma **definição** associa um *nome* a um *valor*.
- **Programar** é definir estruturas de dados e funções para resolver um dado problema.
- O **interpretador** (da linguagem funcional) actua como uma máquina de calcular:

lê uma expressão, calcula o seu valor e mostra o resultado

Exemplo: Um programa para converter valores de temperaturas em graus *Celsius* para graus *Fahrenheit*, e de graus *Kelvin* para graus *Celsius*.

```
celFar c = c * 1.8 + 32
kelCel k = k - 273
```

Depois de carregar este programa no interpretador Haskell, podemos fazer os seguintes testes:

```
> celFar 25
77.0
> kelCel 0
-273
>
```

10

Transparência Referencial

- No paradigma funcional, as expressões:
 - são a representação concreta da informação;
 - podem ser associadas a nomes (definições);
 - denotam valores que são determinados pelo interpretador da linguagem.
- No âmbito de um dado contexto, todos os nomes que ocorrem numa expressão têm um **valor único** e **imutável**.
- O valor de uma expressão depende **unicamente** dos valores das sub-expressões que a constituem, e essas podem ser substituídas por outras que possuam o mesmo valor.

A esta característica dá-se o nome de **transparência referencial**.

12

Linguagens Funcionais

- O nome de *linguagens funcionais* advém do facto de estas terem como operações básicas a *definição de funções* e a *aplicação de funções*.
 - Nas linguagens funcionais as funções são entidades de 1ª classe, isto é, podem ser usadas como qualquer outro objecto: passadas como parâmetro, devolvidas como resultado, ou mesmo armazenadas em estruturas de dados.
- Isto dá às linguagens funcionais uma **grande flexibilidade, capacidade de abstração e modularização do processamento de dados**.
- As linguagens funcionais fornecem um alto nível de abstração, o que faz com que os programas funcionais sejam mais **concisos**, mais **fáceis de entender / manter** e mais **rápidos de desenvolver** do que programas imperativos.
 - No entanto, em certas situações, os programas funcionais podem ser mais penalizadores em termos de eficiência.

13

Haskell

- O Haskell é uma linguagem puramente funcional, fortemente tipada, e com um sistema de tipos extremamente evoluído.
- A linguagem usada neste curso é o **Haskell 98**.
- Exemplos de interpretadores e um compilador para a linguagem Haskell 98:
 - **Hugs** *Haskell User's Gofer System*
 - **GHC** *Glasgow Haskell Compiler* (é o que vamos usar ...)

www.haskell.org

15

Um pouco de história ...

- 1960s** **Lisp** (*untyped, not pure*)
- 1970s** **ML** (*strongly typed, type inference, polymorphism*)
- 1980s** **Miranda** (*strongly typed, type inference, polymorphism, lazy evaluation*)
- 1990s** **Haskell** (*strongly typed, type inference, polymorphism, lazy evaluation, ad-hoc polymorphism, monadic IO*)

14

16

Haskell

Haskell is a general purpose, purely functional programming language incorporating many recent innovations in programming language design. Haskell provides higher-order functions, non-strict semantics, static polymorphic typing, user-defined algebraic datatypes, pattern-matching, list comprehensions, a module system, a monadic I/O system, and a rich set of primitive datatypes, including lists, arrays, arbitrary and fixed precision integers, and floating-point numbers. Haskell is both the culmination and solidification of many years of research on lazy functional languages.

(The Haskell 98 Report)

17

Tipos

Os tipos servem para **classificar** entidades (de acordo com as suas características).

Em Haskell *toda a expressão tem um tipo associado*.

e :: T significa que a expressão **e** tem tipo **T**
é do tipo

Informalmente, podemos associar a noção de “**tipo**” à noção de “**conjunto**”, e a noção de “**ter tipo**” à noção de “**pertença**”.

Exemplos:

58	:: Int	Inteiro
'a'	:: Char	Caracter
[3, 5, 7]	:: [Int]	Lista de inteiros
(8, 'b')	:: (Int, Char)	Par com um inteiro e um caracter

O Haskell é uma linguagem **fortemente tipada**, com um sistema de tipos muito evoluído (como veremos). Em Haskell, a verificação de tipos é feita durante a compilação.

19

Valores & Expressões

Os **valores** são as entidades básicas da linguagem Haskell. São os elementos atômicos.

As **expressões** são obtidas aplicando funções a valores ou a outras expressões.

O interpretador Haskell actua como uma **calculadora** (“*read - evaluate - print loop*”):

ê uma expressão, calcula o seu valor e apresenta o resultado.

Exemplos:

```
> 5
5
> 3.5 + 6.7
10.2
> 2 < 35
True
> not True
False
> not ((3.5+6.7) > 23)
True
```

18

Tipos Básicos

Bool Boleanos: True, False

Char Caracteres: 'a', 'b', 'A', '1', '\n', '2', ...

Int Inteiros de tamanho limitado: 1, -3, 234345, ...

Integer Inteiros de tamanho ilimitado: 2, -7, 75756850013434682, ...

Float Números de vírgula flutuante: 3.5, -6.53422, 51.2E7, 3e4, ...

Double Núm. vírg. flut. de dupla precisão: 3.5, -6.5342, 51.2E7, ...

() *Unit* () é o seu único elemento do tipo *Unit*.

20

Tipos Compostos

Produtos Cartesianos $(T1, T2, \dots, Tn)$

$(T1, T2, \dots, Tn)$ é o tipo dos tuplos com o 1º elemento do tipo $T1$, 2º elemento do tipo $T2$, etc.

Exemplos: `(1,5) :: (Int, Int)`
`('a',6,True) :: (Char, Int, Bool)`

Listas $[T]$

$[T]$ é o tipo da listas cujos elementos *são todos* do tipo T .

Exemplos: `[2,5,6,8] :: [Integer]`
`['h','a','s'] :: [Char]`
`[3.5,86.343,1.2] :: [Float]`

Funções $T1 \rightarrow T2$

$T1 \rightarrow T2$ é o tipo das funções que *recebem* valores do tipo $T1$ e *devolvem* valores do tipo $T2$.

Exemplos: `not :: Bool -> Bool`
`ord :: Char -> Int`

21

Definições

Uma definição **associa** um nome a uma expressão. **nome = expressão**

nome tem que ser uma palavra começada por letra minúscula.

A definição de funções pode ainda ser feita por um conjunto de **equações** da forma:

nome arg1 arg2 ... argn = expressão

Quando se define uma função podemos incluir *informação sobre o seu tipo*. No entanto, essa informação **não é obrigatória**.

Exemplos:

```
pi = 3.1415
areaCirc x = pi * x * x
areaQuad = \x -> x*x
areaTri b a = (b*a)/2
volCubo :: Float -> Float
volCubo y = y * y * y
```

23

Funções

A operação mais importante das funções é a sua **aplicação**.

Se **f :: T1 -> T2** e **a :: T1** então **f a :: T2**

Exemplos:

```
> not True
False :: Bool

> ord 'a'
97 :: Int

> ord 'A'
65 :: Int

> chr 97
'a' :: Char
```

Preservação de Tipos

O tipo de cada expressão é preservado ao longo do processo de cálculo.

Qual será o tipo de `chr` ?

Novas definições de funções deverão que ser escritas num ficheiro, que depois será carregado no interpretador.

22

Pólimorfismo

O tipo de cada função é **inferido automaticamente** pelo interpretador.

Exemplo:

Para a função `g` definida por: `g x = not (65 > ord x)`

O tipo inferido é `g :: Char -> Bool`

Porquê ?

Mas, há funções às quais é possível associar *mais do que um* tipo concreto.

Exemplos:

```
id x = x
```

O que fazem estas funções ?

```
nl y = '\n'
```

Qual será o seu tipo ?

24

O problema é resolvido recorrendo a **variáveis de tipo**.

Uma variável de tipo representa um tipo qualquer.

```
id :: a -> a
nl :: a -> Char
```

Em Haskell:

- As variáveis de tipo representam-se por nomes começados por letras minúsculas (normalmente a, b, c, ...).
- Os tipos concretos usam nomes começados por letras maiúsculas (ex: Bool, Int, ...).

Quando as funções são usadas, as variáveis de tipos são substituídas pelos tipos concretos adequados.

Exemplos:

```
id True
id 'a'
nl False
nl (volCubo 3.2)
```

```
id :: Bool -> Bool
id :: Char -> Char
nl :: Bool -> Char
nl :: Float -> Char
```

25

O Haskell tem um enorme conjunto de definições (que está no módulo **Prelude**) que é carregado por omissão e que constitui a base da linguagem Haskell.

Alguns operadores:

Lógicos: **&&** (e), **||** (ou), **not** (negação)

Numéricos: **+**, **-**, *****, **/** (divisão de reais), **^** (exponenciação com inteiros), **div** (divisão inteira), **mod** (resto da divisão inteira), ****** (exponenciações com reais), **log**, **sin**, **cos**, **tan**, ...

Relacionais: **==** (igualdade), **/=** (desigualdade), **<**, **<=**, **>**, **>=**

Condicional: **if ... then ... else ...**

```
      ↑           ↙ ↘
      :: Bool     :: a
```

Exemplo:

```
> if (3>=5) then [1,2,3] else [3,4]
[3,4]
> if (ord 'A' == 65) then 2 else 3
2
```

27

Funções cujos tipos têm variáveis de tipo são chamadas **funções polimórficas**.

Um tipo pode conter diferentes variáveis de tipo.

Exemplo:

```
fst (x,y) = x
fst :: (a,b) -> a
```

Inferência de tipos

O tipo de cada função é inferido automaticamente pelo compilador de Haskell.

O compilador infere sempre o **tipo mais preciso** de qualquer expressão (o seu tipo principal).

É possível associar a uma função um tipo **mais específico** do que o tipo inferido automaticamente.

Exemplo:

```
seg :: (Bool,Int) -> Int
seg (x,y) = y
```

26

Módulos

Um programa Haskell está organizado em *módulos*.

Cada **módulo** é uma coleção de funções e tipos de dados, definidos num ambiente fechado.

Um módulo pode exportar todas ou só algumas das suas definições. (...)

```
module Nome (nomes_a_exportar) where
... definições ...
```

Ao arrancar o interpretador do GHC, **ghci**, este carrega o módulo **Prelude** (que contém um enorme conjunto de declarações) e fica à espera dos pedidos do utilizador.

ghci



```
GHC Interactive, version 6.2.1, for Haskell 98.
http://www.haskell.org/ghc/
Type :? for help.
```

```
Loading package base ... linking ... done.
Prelude>
```

28

O utilizador pode fazer dois tipos de pedidos ao interpretador **ghci**:

- Calcular o valor de uma expressão.

```
Prelude> 3+5
8
Prelude> (5>=7) || (3^2 == 9)
True
Prelude> fst (40/2, 'A')
20.0
Prelude> pi
3.141592653589793
Prelude> aaa
<interactive>:1: Variable not in scope: `aaa'
Prelude>
```

- Executar um comando.

- Os comandos do **ghci** começam sempre por dois pontos (:).
- O comando **:?** lista todos os comandos existentes

```
Prelude> :?
Commands available from the prompt:
...
```

29

Depois de carregar um módulo, os nomes definidos nesse módulo passam a estar disponíveis no ambiente de interpretação

```
Prelude> kelCel 300
<interactive>:1: Variable not in scope: `kelCel'
Prelude> :load Temp
Compiling Temp          ( Temp.hs, interpreted )
Ok, modules loaded: Temp.
*Temp> kelCel 300
27
*Temp>
```

Inicialmente, apenas as declarações do módulo Prelude estão no ambiente de interpretação. Após o carregamento do ficheiro Temp.hs, ficam no ambiente todas as definições feitas no módulo Temp e as definições do Prelude.

31

Alguns comandos úteis:

:quit ou **:q** termina a execução do **ghci**.

:type ou **:t** indica o tipo de uma expressão.

```
Prelude> :type (2>5)
(2>5) :: Bool
Prelude> :t not
not :: Bool -> Bool
Prelude> :q
Leaving GHCi.
```

:load ou **:l** carrega o programa (o módulo) que está num dado ficheiro.

Exemplo: Considere o seguinte programa guardado no ficheiro Temp.hs

```
module Temp where

celFar c = c * 1.8 + 32

kelCel k = k - 273

kelFar k = celFar (kelCel k)
```

Os programas em Haskell têm normalmente extensão **.hs** (de *haskell script*)

30

Um **módulo** constitui um *componente de software* e dá a possibilidade de gerar bibliotecas de funções que podem ser **reutilizadas** em diversos programas Haskell.

Exemplo: Muitas funções sobre caracteres estão definidas no **módulo Char** do GHC.

Para se utilizarem declarações feitas noutros módulos, que não o Prelude, é necessário primeiro fazer a sua importação através da instrução:

```
import Nome_do_módulo
```

Exemplo.hs

```
module Exemplo where

import Char

letra :: Int -> Char
letra n = if (n>=65 && n<=90) || (n>=97 && n<=122)
          then chr n
          else ' '

numero :: Int -> Char
numero n = if (n>=48 && n<=57)
            then chr n
            else ' '
```

32

Comentários

É possível colocar **comentários** num programa Haskell de duas formas:

- `--` O texto que aparece a seguir a `--` até ao final da linha é ignorado pelo interpretador.
- `{- ... -}` O texto que estiver entre `{-` e `-}` não é avaliado pelo interpretador. Podem ser várias linhas.

```
module Temp where

-- de Celcius para Farenheit
celFar c = c * 1.8 + 32

-- de Kelvin para Celcius
kelCel k = k - 273

-- de Kelvin para Farenheit
kelFar k = celFar (kelCel k)

{- dado valor da temperatura em Kelvin, retorna o triplo com
o valor da temperatura em Kelvin, Celcius e Farenheit -}

kelCelFar k = (k, kelCel k, kelFar k)
```

33

- **O tipo função associa à direita.**

Isto é, `f :: T1 -> T2 -> ... -> Tn -> T`

é uma forma abreviada de escrever

```
f :: T1 -> (T2 -> (... -> (Tn -> T)...))
```

- **A aplicação de funções é associativa à esquerda.**

Isto é, `f x1 x2 ... xn`

é uma forma abreviada de escrever

```
(...((f x1) x2) ...) xn
```

35

As funções `test` e `test'` são muito parecidas mas há uma diferença essencial:

```
test (x,y) = [ (not x), (y || x), (x && y) ]
test' x y = [ (not x), (y || x), (x && y) ]
```

Têm tipos diferentes !

A função `test` recebe **um único argumento** (que é um par de booleanos) e devolve uma lista de booleanos.

```
test :: (Bool,Bool) -> [Bool]
```

```
> test (True,False)
```

A função `test'` recebe **dois argumentos**, cada um do tipo `Bool`, e devolve uma lista de booleanos.

```
test' :: Bool -> Bool -> [Bool]
```

```
> test' True False
```

A função `test'` recebe um valor de cada vez. Realmente, o seu tipo é:

```
test' :: Bool -> (Bool -> [Bool])
```

```
> (test' True) False
```

Mas os parentesis podem ser dispensados ! 34

Exercício:

Considere a seguinte declaração das funções `fun1`, `fun2` e `fun3`.

```
fun1 (x,y) = (not x) || y
```

```
fun2 a b = (a || b, a && b)
```

```
fun3 x y z = x && y && z
```

Qual será o tipo de cada uma destas funções ?

Dê exemplos da sua invocação.

36

Lista e String

[a] é o tipo das listas cujos elementos *são todos* do tipo **a**.

```
Exemplos: [2,5,6,8] :: [Integer]
           [(1+3, 'c'), (8, 'A'), (4, 'd')] :: [(Int, Char)]
           [3.5, 86.343, 1.2*5] :: [Float]
           ['0', '1', 'a'] :: [Char]
```

Atenção! ['A', 4, 3, 'C'] **Não são listas bem formadas**, porque os seus elementos não têm todos o mesmo tipo!
[(1,5), 9, (6,7)]

String O Haskell tem pré-definido o tipo **String** como sendo **[Char]**.

Os valores do tipo String também se escrevem de forma abreviada entre “ ”.

Exemplo: “haskell” é equivalente a ['h','a','s','k','e','l','l']
> “01a” == ['0','1','a']
True

37

Funções sobre String definidas no Prelude.

words :: String -> [String] dá a lista de palavras de um texto.

unwords :: [String] -> String constrói um texto a partir de uma lista de palavras.

lines :: String -> [String] dá a lista de linhas de um texto (i.e. parte pelo '\n').

Exemplos:

```
Prelude> words "aaaa bbbb cccc\tddddd eeee\nffff gggg hhhh"
["aaaa","bbbb","cccc","dddd","eeee","ffff","gggg","hhhh"]
```

```
Prelude> unwords ["aaaa","bbbb","cccc","dddd","eeee","ffff","gggg","hhhh"]
"aaaa bbbb cccc dddd eeee ffff gggg hhhh"
```

```
Prelude> lines "aaaa bbbb cccc\tddddd eeee\nffff gggg hhhh"
["aaaa bbbb cccc\tddddd eeee","ffff gggg hhhh"]
```

```
Prelude> reverse "programacao funcional"
"lanoicnuf oacamargorp"
```

39

Algumas funções sobre listas definidas no Prelude.

head :: [a] -> a dá o primeiro elemento da lista (a cabeça da lista).

tail :: [a] -> [a] dá a lista sem o primeiro elemento (a cauda da lista).

take :: Int -> [a] -> [a] dá um segmento inicial de uma lista.

drop :: Int -> [a] -> [a] dá um segmento final de uma lista.

reverse :: [a] -> [a] calcula a lista invertida.

last :: [a] -> a dá o último elemento da lista.

Exemplos:

```
Prelude> head [3,4,5,6,7,8,9]
3
Prelude> tail ['a','b','c','d']
['b','c','d']
Prelude> take 3 [3,4,5,6,7,8,9]
[3,4,5]
Prelude> drop 3 [3,4,5,6,7,8,9]
[6,7,8,9]
Prelude> reverse [3,4,5,6,7,8,9]
[9,8,7,6,5,4,3]
Prelude> last ['a','b','c','d']
'd'
```

38

Listas por Compreensão

Inspirada na forma de definir conjuntos por compreensão em linguagem matemática, a linguagem Haskell tem também mecanismos para definir **listas por compreensão**.

$\{2x \mid x \in \{10,3,7,2\}\}$ `[2*x | x <- [10,3,7,2]]` = [20,6,14,4]

$\{n \mid n \in \{9,8,-2,-10,3\} \wedge 0 \leq n+2 \leq 10\}$

`[n | n <- [9,8,-2,-10,3] , 0<=n+2, n+2<=10]` = [8,-2,3]

$\{4,7,\dots,19\}$ `[4,7..19]` = [4,7,10,13,16,19]

`[1..7]` = [1,2,3,4,5,6,7]

$\{(x,y) \mid x \in \{3,4,5\} \wedge y \in \{9,10\}\}$

`[(x,y) | x <- [3,4,5], y <- [9,10]]`
= [(3,9),(3,10),(4,9),(4,10),(5,9),(5,10)]

40

Listas infinitas

$\{5,10, \dots\}$ `[5,10..]` = [5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55, ...]

$\{x^3 \mid x \in \mathbb{N} \wedge \text{par}(x)\}$

`[x^3 | x <- [0..], even x]` = [0,8,46,216, ...]

Mais exemplos:

```
Prelude> ['A'..'Z']
"ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ"
Prelude> ['A','C'..'X']
"ACEGIKMOQSUW"
Prelude> [50,45..(-20)]
[50,45,40,35,30,25,20,15,10,5,0,-5,-10,-15,-20]
Prelude> drop 20 ['a'..'z']
"uvwxyz"
Prelude> take 10 [3,3..]
[3,3,3,3,3,3,3,3,3,3]
```

41

Padrões (patterns)

Um **padrão** é uma **variável**, uma **constante**, ou um **"esquema" de um valor atômico** (isto é, o resultado de aplicar construtores básicos dos valores a outros padrões).

No Haskell, um padrão **não** pode ter variáveis repetidas (*padrões lineares*).

Exemplos:

Padrões	Tipos	Não padrões
x	a	[x, 'a', 1]
True	Bool	(4*6, y)
4	Int	Porquê ?
(x,y,(True,b))	(a,b,(Bool,c))	
('A',False,x)	(Char,Bool,a)	
[x,'a',y]	[Char]	

Quando não nos interessa dar nome a uma variável, podemos usar `_` que representa uma *variável anônima nova*.

Exemplos:

```
snd (_,x) = x
segundo (_,y,_) = y
```

43

Equações e Funções

Uma função pode ser definida por equações que relacionam os seus argumentos com o resultado pretendido.

Exemplos:

```
triplo x = 3 * x
dobro y = y + y
perimCirc r = 2*pi*r
perimTri x y z = x+y+z
minimo x y = if x>y then y else x
```

As equações definem **regras de cálculo** para as funções que estão a ser definidas.

nome *arg1 arg2 ... argn* = expressão

Nome da função
(iniciada por letra minúscula).

Argumentos da função.
Cada argumento é um **padrão**.
(cada variável não pode ocorrer mais do que uma vez)

O tipo da função é *inferido* tendo por base que ambos os lados da equação têm que ter o mesmo tipo.

42

Exemplos:

```
soma :: (Int,Int) -> Int -> (Int,Int)
soma (x,y) z = (x+z, y+z)
```

outro modo seria

```
soma w z = ((fst w)+z, (snd w)+z)
```

Qual é mais legível ?

```
exemplo :: (Bool,Float) -> ((Float,Int), Float) -> Float
exemplo (True,y) ((x,_) ,w) = y*x + w
exemplo (False,y) _ = y
```

em alternativa, poderíamos ter

```
exemplo a b = if (fst a) then (snd a)*(fst (fst b)) + (snd b)
              else (snd a)
```

44

Redução

O cálculo do valor de uma expressão é feito usando as equações que definem as funções como regras de cálculo.

Uma **redução** é um passo do processo de cálculo (é usual usar o símbolo \Rightarrow denotar esse passo)

Cada redução resulta de substituir a *instância* do lado esquerdo da equação (o **redex**) pelo respectivo lado direito (o **contractum**).

Exemplos: Relembre as seguintes funções

```
triplo x = 3 * x
dobro y = y + y
snd (_,x) = x
nl x = '\n'
```

Exemplos: $\text{triplo } 7 \Rightarrow 3*7 \Rightarrow 21$

A instância de $(\text{triplo } x)$ resulta da *substituição* $[7/x]$.

$\text{snd } (9,8) \Rightarrow 8$

A instância de $\text{snd } (_,x)$ resulta da *substituição* $[9/_,8/x]$.

45

Lazy Evaluation (*call-by-name*)

```
dobro (triplo (snd (9,8)))  $\Rightarrow$  (triplo (snd (9,8)))+(triplo (snd (9,8)))
 $\Rightarrow$  (3*(snd (9,8))) + (triplo (snd (9,8)))
 $\Rightarrow$  (3*(snd (9,8))) + (3*(snd (9,8)))
 $\Rightarrow$  (3*8) + (3*(snd (9,8)))
 $\Rightarrow$  24 + (3*(snd (9,8)))
 $\Rightarrow$  24 + (3*8)
 $\Rightarrow$  24 + 24
 $\Rightarrow$  48
```

Com a estratégia *lazy* os parametros das funções só são calculados se o seu valor for mesmo necessário.

$\text{nl } (\text{triplo } (\text{dobro } (7*45))) \Rightarrow '\n'$

A *lazy evaluation* faz do Haskell uma linguagem **não estrita**. Isto é, uma função aplicada a um valor indefinido pode ter em Haskell um valor bem definido.

$\text{nl } (3/0) \Rightarrow '\n'$

A *lazy evaluation* também vai permitir ao Haskell lidar com *estruturas de dados infinitas*.

47

A expressão $\text{dobro } (\text{triplo } (\text{snd } (9,8)))$ pode reduzir de três formas distintas:

$\text{dobro } (\text{triplo } (\text{snd } (9,8))) \Rightarrow \text{dobro } (\text{triplo } 8)$

$\text{dobro } (\text{triplo } (\text{snd } (9,8))) \Rightarrow \text{dobro } (3*(\text{snd } (9,8)))$

$\text{dobro } (\text{triplo } (\text{snd } (9,8))) \Rightarrow (\text{triplo } (\text{snd } (9,8)))+(triplo (\text{snd } (9,8)))$

A estratégia de redução usada para o cálculo das expressões é uma característica essencial de uma linguagem funcional.

O Haskell usa a estratégia *lazy evaluation* (*call-by-name*), que se caracteriza por escolher para reduzir sempre o redex mais externo. Se houver vários redexes ao mesmo nível escolhe o redex mais à esquerda (*outermost; leftmost*).

Uma outra estratégia de redução conhecida é a *eager evaluation* (*call-by-value*), que se caracteriza por escolher para reduzir sempre o redex mais interno. Se houver vários redexes ao mesmo nível escolhe o redex mais à esquerda (*innermost; leftmost*).

46

Podemos definir uma função recorrendo a várias equações.

Exemplo:

```
h :: (Char, Int) -> Int
h ('a', x) = 3*x
h ('b', x) = x+x
h (_, x) = x
```

Todas as equações têm que ser bem tipadas e de tipos coincidentes.

Cada equação é usada como regra de redução. Quando uma função é aplicada a um argumento, a equação que é selecionada como regra de redução é a **1ª equação** (a contar de cima) cujo **padrão** que tem como argumento **concorda** com o argumento actual (*pattern matching*).

Exemplos:

$h ('a', 5) \Rightarrow 3*5 \Rightarrow 15$

$h ('b', 4) \Rightarrow 4+4 \Rightarrow 8$

$h ('B', 9) \Rightarrow 9$

Note: Podem existir *várias* equações com padrões que concordam com o argumento actual. Por isso, a ordem das equações é importante, pois define uma prioridade na escolha da regra de redução.

O que acontece se alterar a ordem das equações que definem h ?

48

Funções Totais & Funções Parciais

Uma função diz-se **total** se está definida para todo o valor do seu domínio.

Uma função diz-se **parcial** se há valores do seu domínio para os quais ela não está definida (isto é, não é capaz de produzir um resultado no conjunto de chegada).

Exemplos:

```
conjuga :: (Bool,Bool) -> Bool
conjuga (True,True) = True
conjuga (x,y) = False
```

Função total

```
parc :: (Bool,Bool) -> Bool
parc (True,False) = False
parc (True,x) = True
```

Função parcial

Porquê ?

49

Definições Locais

Uma definição associa um nome a uma expressão.

Todas as definições feitas até aqui podem ser vistas como **globais**, uma vez que elas são visíveis no *módulo* do programa aonde estão. Mas, muitas vezes é útil reduzir o âmbito de uma declaração.

Em Haskell há duas formas de fazer definições **locais**: utilizando expressões **let ... in** ou através de cláusulas **where** junto da definição equacional de funções.

Exemplos:

Porquê ?

```
let c = 10
    (a,b) = (3*c, f 2)
    f x = x + 7*c
in f a + f b
```

⇒ 242

```
testa y = 3 + f y + f a + f b
where c = 10
      (a,b) = (3*c, f 2)
      f x = x + 7*c
```

```
> testa 5
320
> c
Variable not in scope: `c`
> f a
Variable not in scope: `f`
Variable not in scope: `a`
```

As declarações locais podem ser de funções e de identificadores (fazendo uso de padrões).

51

Tipos Sinónimos

O Haskell pode renomear tipos através de declarações da forma:

```
type Nome p1 ... pn = tipo
```

parâmetros (*variáveis de tipo*)

Exemplos:

```
type Ponto = (Float,Float)
type ListaAssoc a b = [(a,b)]
```

Note que não estamos a criar tipos novos, mas apenas nomes novos para tipos já existentes. Esses nomes devem contribuir para a compreensão do programa.

Exemplo:

```
distOrigem :: Ponto -> Float
distOrigem (x,y) = sqrt (x^2 + y^2)
```

O tipo **String** é outro exemplo de um tipo sinónimo, definido no Prelude.

```
type String = [Char]
```

50

Layout

Ao contrário de quase todas as linguagens de programação, o Haskell não necessita de marcas para delimitar as diversas declarações que constituem um programa.

Em Haskell a *identação do texto* (isto é, a forma como o texto de uma definição está disposto), tem um significado bem preciso.

Regras fundamentais:

1. Se uma linha começa mais à frente do que começou a linha anterior, então ela deve ser considerada como a continuação da linha anterior.
2. Se uma linha começa na mesma coluna que a anterior, então elas são consideradas definições independentes.
3. Se uma linha começa mais atrás do que a anterior, então essa linha não pretence à mesma lista de definições.

Ou seja: *definições do mesmo género devem começar na mesma coluna*

Exemplo:

```
exemplo :: Float -> Float -> Float
exemplo x 0 = x
exemplo x y = let a = x*y
                b = if (x>=y) then x/y
                    else y*x
                c = a-b
                in (a+b)*c
```

52

Operadores

Operadores infixos como o `+`, `*`, `&&`, `...`, não são mais do que funções.

Um operador infix pode ser usado como uma função vulgar (i.e., usando notação prefixa) se estiver entre parêntesis.

Exemplo: `(+) 2 3` é equivalente a `2+3`

Note que `(+) :: Int -> Int -> Int`

Podem-se definir novos operadores infixos.

```
(+>) :: Float -> Float -> Float
x +> y = x^2 + y
```

Funções binárias podem ser usadas como um operador infix, colocando o seu nome entre ```.

Exemplo: `mod :: Int -> Int -> Int`

`3 `mod` 2` é equivalente a `mod 3 2`

53

Funções com Guardas

Em Haskell é possível definir funções com alternativas usando **guardas**.

Uma guarda é uma expressão booleana. Se o seu valor for `True` a equação correspondente será usada na redução (senão tenta-se a seguinte).

Exemplos:

```
sig x y = if x > y then 1
         else if x < y then -1
         else 0
```

é equivalente a

```
sig x y | x > y = 1
        | x < y = -1
        | x == y = 0
```

ou a

```
sig x y
  | x > y = 1
  | x < y = -1
  | otherwise = 0
```

`otherwise` é equivalente a `True`.

55

Cada operador tem uma **prioridade** e uma **associatividade** estipulada.

Isto faz com que seja possível evitar alguns parêntesis.

Exemplo: `x + y + z` é equivalente a `(x + y) + z`

`x + 3 * y` é equivalente a `x + (3 * y)`

A aplicação de funções tem prioridade máxima e é associativa à esquerda.

Exemplo: `f x * y` é equivalente a `(f x) * y`

É possível indicar a prioridade e a associatividade de novos operadores através de declarações.

```
infixl num op
infixr num op
infix num op
```

54

Exemplo: Raízes reais do polinómio $ax^2 + bx + c$

```
raizes :: (Double,Double,Double) -> (Double,Double)
raizes (a,b,c) = (r1,r2)
  where r1 = (-b + r) / (2*a)
        r2 = (-b - r) / (2*a)
        d = b^2 - 4*a*c
        r | d >= 0 = sqrt d
          | d < 0 = error "raizes imaginarias"
```

error é uma função pré-definida que permite indicar a mensagem de erro devolvida pelo interpretador. Repare no seu tipo

```
error :: String -> a
```

```
> raizes (2,10,3)
(-0.320550528229663,-4.6794494717703365)
> raizes (2,3,4)
*** Exception: raizes imaginarias
```

56

Listas

[T] é o tipo das listas cujos elementos são todos do tipo T -- *listas homogêneas*.

```
[3.5^2, 4*7.1, 9+0.5] :: [Float]
[(253,"Braga"), (22,"Porto"), (21,"Lisboa")] :: [(Int,String)]
[[1,2,3], [1,4], [7,8,9]] :: [[Integer]]
```

Na realidade, as listas são construídas à custa de dois **construtores primitivos**:

- a lista vazia []
- o construtor (:), que é um operador infix que dado um elemento x de tipo a e uma lista l de tipo [a], constrói uma nova lista com x na 1ª posição seguida de l.

```
[] :: [a]
(:) :: a -> [a] -> [a]
```

[1,2,3] é uma abreviatura de 1:(2:(3:[])) que é igual a 1:2:3:[]
porque (:) é associativa à direita.

Portanto: [1,2,3] = 1:[2,3] = 1:2:[3] = 1:2:3:[]

57

Recorrência

Como definir a função que calcula o comprimento de uma lista ?

Temos dois casos:

- Se a lista for vazia o seu comprimento é zero.
- Se a lista não for vazia o seu comprimento é um mais o comprimento da cauda da lista.

```
length [] = 0
length (x:xs) = 1 + length xs
```

Esta função é **recursiva** uma vez que se invoca a si própria (aplicada à cauda da lista).

A função **termina** uma vez que as invocações recursivas são feitas sobre listas cada vez mais curtas, e vai chegar ao ponto em que a lista é vazia.

```
length [1,2,3] = length (1:[2,3]) => 1 + length [2,3]
=> 1 + (1 + length [3])
=> 1 + (1 + (1 + length []))
=> 1 + (1 + (1 + 0))
=> 3
```

Em linguagens funcionais, a **recorrência** é a forma de obter ciclos.

59

Os padrões do tipo lista são expressões envolvendo apenas os construtores : e [] (*entre parentesis*), ou a representação abreviada de listas.

```
head (x:xs) = x
```

Qual o tipo destas funções ?

```
tail (x:xs) = xs
```

As funções são totais ou parciais ?

```
null [] = True
null (x:xs) = False
```

```
> head [3,4,5,6]
3
> tail "HASKELL"
"ASKELL"
> head []
*** exception
> null [3.4, 6.5, -5.5]
False
> soma3 [5,7]
13
```

```
soma3 :: [Integer] -> Integer
soma3 [] = 0
soma3 (x:y:z:t) = x+y+z
soma3 (x:y:t) = x+y
soma3 (x:t) = x
```

Em soma3 a ordem das equações é importante ? Porquê ?

58

Mais alguns exemplos de funções já definidas no módulo Prelude:

```
sum [] = 0
sum (x:xs) = x + sum xs
```

Qual o tipo destas funções ?

São totais ou parciais ?

Podemos trocar a ordem das equações ?

```
last [x] = x
last (_:xs) = last xs
```

```
elem x [] = False
elem x (y:ys) | x == y = True
               | otherwise = elem x ys
```

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[] ++ l = l
(x:xs) ++ l = x : (xs ++ l)
```

60

Considere a função `zip` já definida no `Prelude`:

```
zip [] [] = []
zip [] (y:ys) = []
zip (x:xs) [] = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : (zip xs ys)
```

Qual o seu tipo ? É total ou parcial ?
Podemos trocar a ordem das equações ?
Podemos dispensar alguma equação ?
Será que podemos definir `zip` com menos equações ?

Exercícios:

- Indique todos os passos de redução envolvidos no cálculo da expressão:
`zip [1,2] "LEI"`
- Defina a função que faz o "zip" de 3 listas.
- Defina a função `unzip :: [(a,b)] -> ([a],[b])`

61

Mais algumas funções sobre listas pré-definidas no `Prelude`.

```
(x:_) !! 0 = x
(_:xs) !! (n+1) = xs !! n
```

```
init [x] = []
init (x:xs) = x : init xs
```

O que fazem estas funções ?

Qual o seu tipo ?

Estas funções serão totais ?

Trocando a ordem das equações, será que obtemos a mesma função ?

63

Padrões sobre números naturais.

O Haskell aceita como um padrão sobre números naturais, expressões da forma:

(**variável + número_natural**)

Exemplos:

```
fact 0 = 1
fact (n+1) = (n+1) * (fact n)
```

```
decTres (x+3) = x
```

```
> fact 4
24
> fact (-2)
*** Exception: Non-exhaustive patterns in function fact
```

```
> decTres 5
2
> decTres 10
7
> decTres 2
*** Exception: Non-exhaustive ...
```

Atenção: expressões como
(n*5), (x-4) ou (2+n)
não são padrões !

62

As funções `take` e `drop` estão pré-definidas no `Prelude` da seguinte forma:

```
take :: Int -> [a] -> [a]
take n _ | n <= 0 = []
take _ [] = []
take n (x:xs) = x : take (n-1) xs
```

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop n xs | n <= 0 = xs
drop _ [] = []
drop n (_:xs) = drop (n-1) xs
```

Estas funções serão totais ?

Trocando a ordem das equações, será que obtemos a mesma função ?

Defina funções equivalentes utilizando padrões de números naturais.

64

nome@padrão

`nome@padrão` é uma forma de fazer uma definição local ao nível de um argumento de uma função.

Exemplos:

A função `fun :: (Int,String) -> (Char,(Int,String))` pode ser definida, equivalentemente, por:

```
fun (n,(x:xs)) = (x,(n,(x:xs)))
```

ou `fun par@(n,(x:xs)) = (x,par)`

ou `fun (n,(x:xs)) = let par = (n,(x:xs))
in (x,par)`

```
{- Esta função vai retirando os elementos de uma lista até  
encontrar um elemento não positivo -}
```

```
dropWhilePos [] = []  
dropWhilePos lis@(x:xs) | x > 0 = dropWhilePos xs  
| otherwise = lis
```

65

O crivo de Eratosthenes

Esta função deixa ficar numa lista o primeiro elemento e todos os que **não são** múltiplos desse argumento, repetindo em seguida esta operação para a restante lista.

```
crivo [] = []  
crivo (x:xs) = x : (crivo ys)  
  where ys = [ n | n <- xs , n `mod` x /= 0 ]
```

A lista dos números primos não superiores a um dado número.

```
primos_ate' x = crivo [2..x]
```

Lista dos números primos.

```
seqPrimos = crivo [2..]
```

Calcular os n primeiros primos.

```
primeirosPrimos n = take n seqPrimos
```

67

Funções e listas por compreensão

Pedem-se usar listas por compreensão na definição de funções.

Exemplo: Máximo divisor comum de dois números.

```
divisores n = [ x | x <- [1..n], (n `mod` x) == 0 ]
```

```
divisoresComuns x y = [ n | n <- divisores x, (y `mod` n) == 0 ]
```

```
mdc n m = maximum (divisoresComuns n m)
```

66

Algoritmos de Ordenação

A ordenação de um conjunto de valores é um problema muito frequente, e muito útil na organização de informação.

Para o problema de ordenação de uma lista de valores, existem diversos algoritmos:

- *Insertion Sort*
- *Quick Sort*
- *Merge Sort*
- ...

Vamos apresentar estes algoritmos, para *ordenar uma lista de valores por ordem crescente*, de acordo com os operadores relacionais `<`, `<=`, `>`, e `>=` (que implicitamente assumimos estarem definidos para os tipos desses valores).

68