**Cálculo de Sistemas de Informação**
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

1.º/4.º Ano de MEI & MMC / MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2020/21

Teste — 21 de Janeiro 2021
13h00
Sala E1-1.21

---

**Importante** — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos que não queiram manter a nota do **miniteste** devem responder a todas as questões, entregando a prova ao fim de duas horas.*
- *Os alunos que desejam manter a nota do **miniteste** devem responder apenas à parte B (questões 5, 6, 7, 8), devendo nesse caso entregar a prova ao fim de uma hora.*

PROVA COM CONSULTA (1 ou 2 horas)

## Parte A

**Questão 1** Os colaboradores ($C$) de uma rede de supermercados trabalham por turnos ($T$) nas lojas ($L$) da rede ou no seu serviço de vendas on-line ($V$). Seja

$$C \times T \xrightarrow{M} L + V$$

o mapa actual de serviço dessa rede de lojas, sobre o qual alguém especificou a seguinte propriedade como invariante:

$$inv\ M = \mathbf{let}\ [R, S] = M^\circ\ \mathbf{in} \left\{ \begin{array}{lcl} R^\circ \cdot R & \subseteq & id \\ R^\circ \cdot S & \subseteq & \bot \\ S^\circ \cdot S & \subseteq & id \end{array} \right.$$

(a) Usando as leis da álgebra relacional mostre que este invariante pode ser definido de forma bem mais simples. (b) Na sua opinião, qual é a intenção do programador ao forçar esta propriedade do sistema de informação? Justifique a sua resposta.

---

RESOLUÇÃO: (a) — completar as justificações dos passos apresentados:

$$\begin{array}{ll}
& \mathbf{let}\ [R, S] = M^\circ\ \mathbf{in} \left\{ \begin{array}{lcl} R^\circ \cdot R & \subseteq & id \\ R^\circ \cdot S & \subseteq & \bot \\ S^\circ \cdot S & \subseteq & id \end{array} \right. \\
\equiv & \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \mathbf{let}\ [R, S] = M^\circ\ \mathbf{in}\ \ker\ [R, S] \subseteq id \\
\equiv & \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& injective\ M^\circ \\
\equiv & \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& simple\ M
\end{array}$$

$\square$

(b) $M : C \times T \rightarrow L + V$ simples quer dizer que não há $x_1$ e $x_2$ diferentes tais que $x_1 \; M \; (c,t)$ e $x_2 \; M \; (c,t)$. A intenção é impedir que qualquer colaborador $c$ esteja escalado, no mesmo turno $t$, para trabalhar numa loja e nas vendas on-line ao mesmo tempo. $\square$

---

**Questão 2** Demonstre a equivalência seguinte:

$$f \cdot g^\circ \text{ é simétrica} \quad \equiv \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{f}{g} \text{ é reflexiva} \tag{F1}$$

---

RESOLUÇÃO: Completar as justificações dos passos apresentados:

$$\begin{array}{cl} & id \subseteq g^\circ \cdot f \cdot g^\circ \cdot f \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & g \cdot f^\circ \subseteq f \cdot g^\circ \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (f \cdot g^\circ)^\circ \subseteq f \cdot g^\circ \\ \square & \end{array}$$

$\square$

---

**Questão 3** Prove a igualdade

$$\pi_1 = \langle id, \top \rangle^\circ \tag{F2}$$

e use-a para demonstrar:

$$\pi_1 \cdot \langle R, S \rangle = R \cdot \delta \; S \tag{F3}$$

**PS**: recorda-se que o domínio de uma relação binária é uma relação coreflexiva.

---

RESOLUÇÃO: Primeiro (F2) — completar as justificações dos passos apresentados:

$$\begin{array}{cl} & \pi_1 = \langle id, \top \rangle^\circ \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \pi_1 = (\pi_1^\circ \cdot id \cap \pi_2^\circ \cdot \top)^\circ \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \pi_1 = \pi_1 \cap \top \cdot \pi_2 \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \pi_1 = \pi_1 \\ \square & \end{array}$$

Agora (F3):

$$\begin{array}{cl} & \langle id, \top \rangle^\circ \cdot \langle R, S \rangle = R \cdot \delta \; S \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
& R \cap \top \cdot S = R \cdot \delta\, S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& R \cap \top \cdot S = R \cap \top \cdot \delta\, S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& R \cap \top \cdot S = R \cap \top \cdot S \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

---

**Questão 4** Apresente justificações para a seguinte prova do facto $R \subseteq R \cdot R^\circ \cdot R$:

$$
\begin{array}{ll}
& R \subseteq R \cdot R^\circ \cdot R \\
\Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& R \subseteq (R \cdot R^\circ \cap id) \cdot R \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& R \subseteq \rho\, R \cdot R \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}
$$

---

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{ll}
& R \subseteq R \cdot R^\circ \cdot R \\
\Leftarrow & \quad \{ \text{ baixar o lado superior ao baixar } R^\circ \} \\
& R \subseteq (R \cdot R^\circ \cap id) \cdot R \\
\equiv & \quad \{ \text{ definição de } \rho\, R \} \\
& R \subseteq \rho\, R \cdot R \\
\equiv & \quad \{ \ \rho\, R \cdot R = R \ \} \\
& \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

---

## Parte B

**Questão 5** O facto seguinte sobre a **reunião** de relações é fácil de demonstrar:

$$R \cup S = R \quad \Leftarrow \quad S \subseteq R$$

Será a mesma propriedade válida para a **sobreposição** de relações? Cf:

$$R \dagger S = R \quad \Leftarrow \quad S \subseteq R \qquad \text{(F4)}$$

Resposta afirmativa: demonstrar (F4); resposta negativa: apresentar um contra-exemplo, justificando.

---

RESOLUÇÃO: A resposta é negativa, veja-se o contra-exemplo $\top \dagger f = f$ para qualquer função $f$ (pois $f \subseteq \top$) visto nas aulas. $\square$

---

**Questão 6** Em *hackage.haskell.org* lê-se, na biblioteca $Data.List$:

> $break :: (a \to \mathbb{B}) \to [a] \to ([a],[a])$
> *break, applied to a predicate $p$ and a list $xs$, returns a tuple where first element is longest prefix (possibly empty) of $xs$ of elements that do not satisfy $p$ and second element is the remainder of the list:*
>
> $break\ (>3)\ [1,2,3,4,1,2,3,4] \equiv ([1,2,3],[4,1,2,3,4])$
> *(...)*

Infira o teorema grátis de $break$ e derive dele a seguinte instância para funções, para toda a lista $x$:

$$\begin{array}{l}\textbf{let}\\ \quad (y_1, y_2) = break\ q\ (\mathsf{map}\ f\ x)\\ \quad (x_1, x_2) = break\ (q \cdot f)\ x\\ \textbf{in}\ y_1 = \mathsf{map}\ f\ x_1 \wedge y_2 = \mathsf{map}\ f\ x_2\end{array}$$

---

RESOLUÇÃO: Completar as justificações dos passos apresentados: para $R_a := R$, temos $R_t = (R^* \times R^*) \leftarrow R^* \leftarrow (id \leftarrow R)$ em

$$\begin{array}{cl}
& break\ ((R^* \times R^*) \leftarrow R^* \leftarrow (id \leftarrow R))\ break\\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\\
& break \cdot (id \leftarrow R) \subseteq ((R^* \times R^*) \leftarrow R^*) \cdot break\\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\\
& q \cdot R \subseteq p \Rightarrow (break\ q) \cdot R^* \subseteq (R^* \times R^*)\ (break\ p)\\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\\
& q \cdot R \subseteq p \Rightarrow y\ R^*\ x \Rightarrow (break\ q\ y)\ (R^* \times R^*)\ (break\ p\ x)
\end{array}$$

Funções:

$$\begin{array}{cl}
& q \cdot f = p \Rightarrow y = f^*\ x \Rightarrow (break\ q\ y) = (f^* \times f^*)\ (break\ p\ x)\\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\\
& y = f^*\ x \Rightarrow (break\ q\ y) = (f^* \times f^*)\ (break\ (q \cdot f)\ x)\\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\\
& break\ q\ (f^*\ x) = (y_1, y_2)\ \textbf{where}\ (y_1, y_2) = (f^* \times f^*)\ (break\ (q \cdot f)\ x)\\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\\
& break\ q\ (f^*\ x) = (y_1, y_2)\ \textbf{where}\ (y_1, y_2) = (f^* \times f^*)\ (x_1, x_2)\ \textbf{where}\ (x_1, x_2) = (break\ (q \cdot f)\ x)\\
\equiv & \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}\\
& break\ q\ (f^*\ x) = (y_1, y_2)\ \textbf{where}\ \left\{\begin{array}{l} y_1 = f^*\ x_1\\ y_2 = f^*\ x_2\\ (x_1, x_2) = break\ (q \cdot f)\ x\end{array}\right.
\end{array}$$

$\square$

□

---

**Questão 7** Recorde o pequeno caso de estudo desta disciplina sobre modelação da sinalização de uma rede ferroviária $R$ constituída por *segmentos* de via interligados entre si, designados $N$(etwork) $e$(lements):

$$Ne \xleftarrow{R} Ne \xrightarrow{S} Sl$$

$S$ indica a colocação de sinais ($Sl$), necessários sempre que dois segmentos se juntam, para servirem de semáforos. Daí o invariante:

$$joinOk(R, S) \quad = \quad \ker R - id \ \subseteq\ S^\circ \cdot \top \cdot S \tag{F5}$$

Seja dada a seguinte operação que liga o elemento $m$ ao elemento $n$:

$$link\ (m, n)\ (R, S) = (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ, S) \tag{F6}$$

Complete o cálculo da pré-condição mais fraca que garante a preservação de $joinOk$ por $link$, justificando os passos já dados:

$$
\begin{array}{cl}
& joinOk\ (link\ (m, n)\ (R, S)) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& joinOk\ (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ, S) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \ker\ (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ) \ \subseteq\ S^\circ \cdot \top \cdot S \cup id \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \vdots \ \ \ldots \text{ (vários passos) } \ldots \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& joinOk\ (R, S) \wedge \underbrace{\langle \forall\, k \ :\ n\ R\ k \wedge k \neq m :\ \langle \exists\, s, s' \ :\ s\ S\ k :\ s'\ S\ m \rangle \rangle}_{WP} \\
\Box &
\end{array}
$$

---

RESOLUÇÃO: O facto seguinte,

$$\ker\ (R \cup S) = \ker\ R \cup \ker\ S \cup R^\circ \cdot S \cup S^\circ \cdot R \tag{F7}$$

fácil de demonstrar, é útil no cálculo abaixo (completar as justificações dos passos apresentados):

$$
\begin{array}{cl}
& joinOk\ (link\ (m, n)\ (R, S)) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& joinOk\ (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ, S) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \ker\ (R \cup \underline{n} \cdot \underline{m}^\circ) \ \subseteq\ S^\circ \cdot \top \cdot S \cup id \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \ker\ R \cup \ker\ (\underline{n} \cdot \underline{m}^\circ) \ \subseteq\ S^\circ \cdot \top \cdot S \cup id \\ R^\circ \cdot (\underline{n} \cdot \underline{m}^\circ) \ \subseteq\ S^\circ \cdot \top \cdot S \cup id \\ \underline{m} \cdot \underline{n}^\circ \cdot R \ \subseteq\ S^\circ \cdot \top \cdot S \cup id \end{array} \right. \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}
\end{array}
$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathit{joinOk}\ (R, S) \\ \underline{m} \cdot \top \cdot \underline{m}^{\circ} \ \subseteq\ S^{\circ} \cdot \top \cdot S \cup \mathit{id} \\ R^{\circ} \cdot \underline{n} \cdot \underline{m}^{\circ} \ \subseteq\ S^{\circ} \cdot \top \cdot S \cup \mathit{id} \end{array}\right.$$

$$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathit{joinOk}\ (R, S) \\ \top \ \subseteq\ \underline{m}^{\circ} \cdot S^{\circ} \cdot \top \cdot S \cdot \underline{m} \cup \top \\ R^{\circ} \cdot \underline{n} \ \subseteq\ S^{\circ} \cdot \top \cdot S \cdot \underline{m} \cup \underline{m} \end{array}\right.$$

$$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathit{joinOk}\ (R, S) \\ R^{\circ} \cdot \underline{n} - \underline{m} \ \subseteq\ (S^{\circ} \cdot \top \cdot S \cdot \underline{m}) \end{array}\right.$$

$$\equiv \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$$

$$\mathit{joinOk}\ (R, S) \wedge \underbrace{\langle \forall\, k \ :\ n\ R\ k \wedge k \neq m :\ \langle \exists\, s, s' \ :\ s\ S\ k :\ s'\ S\ m \rangle\rangle}_{\mathit{WP}}$$

$\Box$

$\Box$

**Questão 8** Considere o seguinte catamorfismo relacional sobre listas:

$$X_p : A^* \rightarrow A^*$$
$$X_p = (\![\mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot (\Phi_p \times id)]\!)$$

Avalie a veracidade das afirmações seguintes, justificando:

1. $X_p$ é uma relação coreflexiva
2. $X_p$ não é uma relação simples
3. $x \; X_p \; x \Leftarrow x = [\,]$

---

RESOLUÇÃO: Verificação:

1. Vamos verificar $X_p \subseteq id$:

$$
\begin{array}{ll}
& (\![\mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot (\Phi_p \times id)]\!) \subseteq id \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& (\![\mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot (\Phi_p \times id)]\!) \subseteq (\!\mathsf{in}\!) \\
\Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& [\mathsf{nil}, \mathsf{cons} \cdot (\Phi_p \times id)] \subseteq \mathsf{in} \\
\Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{nil} \subseteq \mathsf{nil} \\ \mathsf{cons} \cdot (\Phi_p \times id) \end{array} \right. \subseteq \mathsf{cons}) \\
\Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& \Phi_p \times id \subseteq id \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& \Phi_p \times id \subseteq id \times id \\
\Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& \Phi_p \subseteq id \\
\Box &
\end{array}
$$

   Logo é verdadeira.

2. Falso, pois todas as coreflexivas são simples.
3. Por cancelamento-cata vamos ter $X_p \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil}$, isto é $y \; X_p \; [\,] \;\Leftrightarrow\; y = [\,]$ logo a implicação verifica-se.

$\Box$

---