Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

1.º/4.º Ano de MEI & MMC / MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2018/19

Mini-teste — 29 de Novembro
14h00
Sala E7-1.10

NB: *Este mini-teste consta de* ***4*** *questões todas com as mesma cotação.*

PROVA COM CONSULTA (1 hora)

Questão 1 Considere uma relação simples

$$\mathrm{URL} \xleftarrow{\mathrm{WWW}} \mathit{Ref} \tag{F1}$$

que se dá como especificação abstracta de um sistema de informação baseado no *World Wide Web*, onde:

$$\begin{aligned}
\mathrm{URL} &= \mathit{Unit}^* \\
\mathit{Unit} &= \mathit{PlainText} + \mathit{HyperLink} \\
\mathit{PlainText} &= \mathit{Word}^* \\
\mathit{HyperLink} &= \mathit{Ref} \times \mathit{Plaintext}
\end{aligned}$$

Ou seja, fazendo algumas substituições, tem-se:

$$\mathit{Ref} \xrightarrow{\mathrm{WWW}} (\mathit{PlainText} + \mathit{Ref} \times \mathit{Plaintext})^*$$

Admita que tem definida a relação $A \xleftarrow{\epsilon} A^*$ com o significado óbvio: $a \mathbin{\epsilon} x \ \Leftrightarrow\ a \in \mathsf{elems}\ x$. Isto é, $a \mathbin{\epsilon} x$ quer dizer: *"a ocorre algures na sequência x"*.

Especifique a propriedade que garante que toda a referência (Ref) que ocorre numa URL de WWW é uma referência válida. Isto é, que nunca se obtém a irritante mensagem:

The requested URL ... was not found on this server.

Sugestão: Construa a relação auxiliar $\mathit{Ref} \xleftarrow{R} \mathrm{URL}$ que relaciona cada URL com as referências que ela inclui e use-a na sua resolução. Acompanhe a sua resolução com diagramas explicativos.

RESOLUÇÃO: Uma URL contém Unit que por sua vez ou é $\mathit{PlainText}$ ou é $\mathit{HyperLink} = \mathit{Ref} \times \mathit{Plaintext}$:[1]

$$\begin{tikzcd}
\mathit{Ref} & \mathit{PlainText} + \mathit{Ref} \times \mathit{Plaintext} \arrow[l, "S"'] & \mathrm{URL} \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[ll, bend left, "R"]
\end{tikzcd}$$

Por construção, S terá que ser uma alternativa, onde não se consegue extrair qualquer Ref de $\mathit{PlainText}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathit{PlainText} \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\perp"'] & \mathit{Unit} \arrow[d, "S=[\perp,\pi_1]"] & \mathit{Ref} \times \mathit{Plaintext} \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& \mathit{Ref} &
\end{tikzcd}$$

---

[1] NB: esta resolução está mais detalhada do que o que se pedia.

Significado de $S = [\bot\,, \pi_1]$:

$$
\begin{array}{ll}
& r\ [\bot\,, \pi_1]\ x \\
\equiv & \quad \{\ \text{definição de } [R\,, S]\ ;\ \bot \cdot R = \bot;\ \bot \cup R = R\ \} \\
& r\ (\pi_1 \cdot i_2^\circ)\ x \\
\equiv & \quad \{\ \text{composição relational; converso; } \pi_1\ (a, b) = a\ \} \\
& \langle \exists\ t\ ::\ x = i_2\ (r, t) \rangle
\end{array}
$$

Quer dizer: $r\ [\bot\,, \pi_1]\ x$ é verdade sse x é um $HyperLink$ e r é a referência de x. Daí, o significado de

$$R \quad = \quad Ref \xleftarrow{[\bot\,, \pi_1] \cdot \epsilon} \text{URL}$$

vem a ser (completar):

$$
\begin{array}{ll}
& r\ R\ u \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \langle \exists\ x\ :\ \langle \exists\ t\ ::\ x = i_2\ (r, t) \rangle\ :\ x\ \epsilon\ u \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \langle \exists\ t\ ::\ i_2\ (r, t)\ \epsilon\ u \rangle
\end{array}
$$

Definida a relação R, propõe-se:

$$R \cdot \text{WWW} \ \subseteq\ \text{WWW}^\circ \cdot \top$$

cf diagrama,

$$
\begin{tikzcd}
\text{URL} \arrow[d, "R"'] & Ref \arrow[l, "\text{WWW}"'] \arrow[d, "\top"] \\
Ref & \text{URL} \arrow[l, "\text{WWW}^\circ"']
\end{tikzcd}
$$

que se pode interpretar assim:

$$
\begin{array}{ll}
& R \cdot \text{WWW} \ \subseteq\ \text{WWW}^\circ \cdot \top \\
\equiv & \quad \{\ \text{divisão}\ \} \\
& \text{WWW} \ \subseteq\ R \setminus (\text{WWW}^\circ \cdot \top) \\
\equiv & \quad \{\ \text{passagem a `pointwise'}\ \} \\
& \langle \forall\ u, r\ :\ u\ \text{WWW}\ r :\ \langle \forall\ r'\ :\ r'\ R\ u :\ \langle \exists\ u'\ ::\ u'\ \text{WWW}\ r' \rangle\rangle\rangle
\end{array}
$$

Isto é, se u é uma URL que existe com referência r, e uma outra referência[2] r' ocorre em u, então r' é a referência de uma outra URL u' existente. $\square$

Questão 2 Mostre que a seguinte *lei de shunting* ("Galois connection")

$$R \cdot g \leqslant S \quad \equiv \quad R \leqslant S \cdot g^\circ \tag{F2}$$

se verifica, onde $R \leqslant S$ é a ordem (5.230) dos apontamentos.

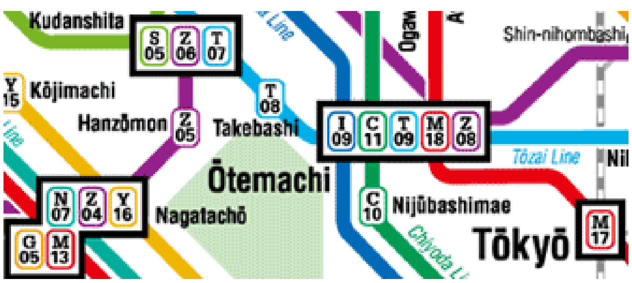
[2] Possivelmente as mesma.

RESOLUÇÃO: Tem-se (completar com justificações):

$$
\begin{array}{cl}
& R \cdot g \leqslant S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \ker\ S \subseteq \ker\ (R \cdot g) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& g \cdot (\ker\ S) \cdot g^\circ \subseteq \ker\ R \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \ker\ (S \cdot g^\circ) \subseteq \ker\ R \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& R \leqslant S \cdot g^\circ \\
\square &
\end{array}
$$

$\square$

Questão 3 Recorde o problema do "metro de Tóquio" onde (cf. figura abaixo) há várias linhas (L) representadas com cores diferentes, cujas paragens (P) estão numeradas sequencialmente e onde as estações (E) podem incluir paragens de linhas diferentes — e.g. a estação "Ötemachi" tem as paragens $\boxed{\frac{C}{11}}$, $\boxed{\frac{M}{18}}$, etc — permitindo aos viajantes mudar de linha.



Sabendo-se que cada paragem está sempre associada a uma e uma só estação, definiu-se o modelo simplificado

$$
\begin{tikzcd}
E & P \arrow[l, "st"'] \arrow[r, "nr"] \arrow[d, "ln"'] & \mathbb{N}_0 \\
& L &
\end{tikzcd}
$$

que a cada paragem associa a respectiva linha, número e estação.

Por exemplo, sendo p a paragem $\boxed{\frac{M}{18}}$ da figura, ter-se-á $st\ p$ = Ötemachi, $ln\ p = M$ e $nr\ p = 18$.

Suponha que alguém escreveu

$$
\frac{nr}{\mathsf{succ} \cdot nr} \subseteq \frac{ln}{ln} \tag{F3}
$$

como especificação do invariante: *se $n+1$ é o número de uma paragem de uma dada linha, então há outra paragem da mesma linha com o número n.* (**NB**: succ $n = n + 1$ é a função sucessor em $\mathbb{N}_0 \xleftarrow{[\underline{0}\,,\mathsf{succ}]} 1 + \mathbb{N}_0$.)

A questão é: estará bem formalizada essa propriedade? Converta (F3) na correspondente expressão lógica equivalente e decida. Se a resposta for negativa, proponha uma alternativa a (F3) que corresponda à propriedade que se pretende especificar.

RESOLUÇÃO: Introduzindo variáveis como sugerido, para quaisquer paragens y e x:

$$
\begin{array}{cl}
& y \dfrac{nr}{\mathsf{succ} \cdot nr}\, x \Rightarrow y \dfrac{ln}{ln}\, x \\
\equiv & \quad \{ \text{ divisão de funções } \} \\
& nr\ y + 1 = nr\ x \Rightarrow ln\ y = ln\ x
\end{array}
$$

— "se duas paragens diferem em número de uma unidade, então estão na mesma linha" — o que não faz sentido. O que se pretente é:

$$\frac{nr}{\mathsf{succ}} \subseteq nr \cdot \frac{ln}{ln} \tag{F4}$$

que expande para:

$$
\begin{aligned}
& y \, \frac{nr}{\mathsf{succ}} \, x \Rightarrow \langle \exists\, z \;:\; y = nr\ z :\ z \, \frac{ln}{ln} \, x \rangle \\
\equiv \quad & \{\ b \tfrac{f}{g}\ a \ \Leftrightarrow\ (g\ b) = (f\ a)\ \} \\
& nr\ x = y + 1 \Rightarrow \langle \exists\, z \;:\; y = nr\ z :\ ln\ z = ln\ x \rangle
\end{aligned}
$$

(Se x não é a primeira paragem de uma linha, então existe sempre uma paragem anterior.) □

Questão 4 Na aula suplementar de 28 de Novembro foi detectado um erro numa correcção de um exame do ano anterior, que já foi corrigido, cf. inv_3 no anexo. Será possível re-escrever-se esse invariante da forma que se segue?

$$inv_3\ (V, V') \quad = \quad dE \cdot V \subseteq Di \ \wedge\ V' \subseteq \frac{dC}{dE} \tag{F5}$$

Justifique formalmente a sua resposta. Se a resposta for positiva, converta $inv_3\ (V, V')$ para notação com variáveis quantificadas e verifique a sua intuição sobre o problema dado.

RESOLUÇÃO: Tem-se (completar com justificações):

$$
\begin{aligned}
& inv_3\ (V, V') \\
\equiv \quad & \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \} \\
& dE \cdot [V, V'] \subseteq [Di, dC] \\
\equiv \quad & \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \} \\
& [dE \cdot V, dE \cdot V'] \subseteq [Di, dC] \\
\equiv \quad & \{\ \text{(F6) abaixo}\ \} \\
& dE \cdot V \subseteq Di \ \wedge\ dE \cdot V' \subseteq dC \\
\equiv \quad & \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \} \\
& dE \cdot V \subseteq Di \ \wedge\ V' \subseteq \frac{dC}{dE}
\end{aligned}
$$

□

Interpretação com variáveis:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} dE \cdot V \subseteq Di \\ V' \subseteq \frac{dC}{dE} \end{array} \right. \\
\equiv \quad & \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} V \subseteq dE^\circ \cdot Di \\ V' \subseteq \frac{dC}{dE} \end{array} \right. \\
\equiv \quad & \{\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} e\ V\ p \Rightarrow (dE\ e)\ Di\ p \\ e\ V'\ c \Rightarrow dE\ e = dC\ c \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

□

Por palavras: se e vota em p então p concorre pelo distrito de e; se e vota em c então c e e têm o mesmo distrito.

NB: em cima recorreu-se a

$$[R, S] \subseteq [P, Q] \equiv \left\{ \begin{array}{l} R \subseteq P \\ S \subseteq Q \end{array} \right. \tag{F6}$$

que é fácil de derivar (completar as justificações):

$$\begin{array}{ll} & [R, S] \subseteq [P, Q] \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & R \cdot i_1^\circ \cup S \cdot i_2^\circ \subseteq [P, Q] \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} R \subseteq [P, Q] \cdot i_1 \\ S \subseteq [P, Q] \cdot i_2 \end{array} \right. \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} R \subseteq P \\ S \subseteq Q \end{array} \right. \\ \Box & \end{array}$$

$\Box$

ANEXO — Recorde de testes e exames anteriores o modelo de um sistema eleitoral electrónico de inspiração uninominal (i.e., em que se pode votar directamente nos candidatos e não apenas nos respectivos partidos) cujo diagrama relacional se apresenta de seguida,

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "p"'] \arrow[rr, bend left, "V'"] \arrow[dr, "dC"'] & P \arrow[r, "V"'] \arrow[d, "Di"] & E \arrow[dl, "dE"] \\
& D &
\end{tikzcd}
$$

onde

- $p\ c$ designa o partido a que o candidato c pertence
- $dC\ c$ designa o distrito pelo qual c é candidato
- $dE\ e$ designa o distrito do eleitor e
- $d\ Di\ p$ regista que o partido p concorre às eleições no distrito d
- $e\ V\ p$ indica que o eleitor e votou no partido p
- $e\ V'\ c$ indica que o eleitor e votou directamente no candidato c.

Neste modelo há vários invariantes, a saber:

$$inv_1\ (V, V') = V : E \leftarrow P \text{ e } V' : E \leftarrow C \text{ são injectivas} \tag{F7}$$

$$inv_2\ (V, V') = V^\circ \cdot V' = \bot \tag{F8}$$

pois um eleitor não pode votar em mais do que um candidato ou partido; e

$$inv_3\ (V, V') \quad = \quad dE \cdot [V\,, V'] \ \subseteq\ [Di, dC] \tag{F9}$$

pois cada eleitor está registado num distrito e só pode votar em candidatos ou partidos que concorram pelo seu distrito.