

Cálculo de Programas

3.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2024/25

1º Teste — 26 de Outubro de 2024, 09h00–11h00
Salas E2-1.01 + E2-1.03 + E2-1.05

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.
- Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

Questão 1 Inferir o tipo mais geral de $\alpha = \langle i_1, \pi_1 \rangle$ e, a partir dele, a propriedade grátis de α .

RESOLUÇÃO: Começemos por tipar i_1 e π_1 separadamente:

$$\begin{cases} i_1 : A \rightarrow A + B \\ \pi_1 : C \times D \rightarrow E \end{cases}$$

Por $\alpha = \langle i_1, \pi_1 \rangle$ de imediato inferimos $A = C \times D$ e, assim:

$$\alpha = \langle i_1, \pi_1 \rangle : (C \times D) \rightarrow ((C \times D + B) \times C)$$

Logo, pelo método baseado em diagrama do costume (fazer) a propriedade grátis é:

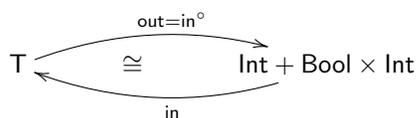
$$((f \times g + h) \times f) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f \times g)$$

□

Questão 2 Considere a seguinte sessão no GHCi, uma vez aberta a biblioteca *Cp.hs*:

```
*Cp> data T = One Int | Two Bool Int
*Cp> :t One
One :: Int -> T
*Cp> :t Two
Two :: Bool -> Int -> T
```

Com base no diagrama



defina *in* e calcule *out* a partir da cláusula $\text{out} \cdot \text{in} = id$.

RESOLUÇÃO: Temos $\text{in} : \text{Int} + \text{Bool} \times \text{Int} \rightarrow \text{T}$, pelo que se obtém:

$$\text{in} = [\text{One}, \widehat{\text{Two}}]$$

Então:

$$\begin{aligned} & \text{out} \cdot \text{in} = id \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & [\text{out} \cdot \text{One}, \text{out} \cdot \widehat{\text{Two}}] = id \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \text{out} \cdot \text{One} = i_1 \\ \text{out} \cdot \widehat{\text{Two}} = i_2 \end{cases} \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \text{out} (\text{One } i) = i_1 \ i \\ \text{out} (\text{Two } b \ i) = i_2 \ (b, i) \end{cases} \end{aligned}$$

□

Questão 3 O combinador

$\text{const} :: a \rightarrow b \rightarrow a$
 $\text{const } a \ b = a$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\text{const } k$ por \underline{k} , qualquer que seja k . Resolva em ordem a k a equação seguinte:

$$\underline{k} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{E1}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned} & \underline{k} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \pi_1 \cdot \underline{k} = \underline{b} \\ \pi_2 \cdot \underline{k} = \underline{a} \end{cases} \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \pi_1 \underline{k} = \underline{b} \\ \pi_2 \underline{k} = \underline{a} \end{cases} \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \pi_1 \underline{k} = \underline{b} \\ \pi_2 \underline{k} = \underline{a} \end{cases} \\ \equiv & \quad \{ \text{mudança de variável } k := (x, y) \} \\ & \begin{cases} \pi_1 (x, y) = \underline{b} \\ \pi_2 (x, y) = \underline{a} \end{cases} \\ \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = b \\ y = a \end{cases} \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & k = (b, a) \end{aligned}$$

□

Questão 4 Demonstre a lei:

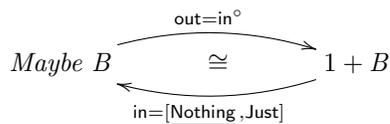
$$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned} & (g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j) \\ \equiv & \{ \text{definição de } f + g \text{ duas vezes (21)} \} \\ & [i_1 \cdot g \cdot h, i_2 \cdot i \cdot j] = [i_1 \cdot g, i_2 \cdot i] \cdot (h + j) \\ \equiv & \{ \text{absorção-+ (22)} \} \\ & [i_1 \cdot g \cdot h, i_2 \cdot i \cdot j] = [i_1 \cdot g \cdot h, i_2 \cdot i \cdot j] \end{aligned}$$

□

Questão 5 Recorde o isomorfismo



e considere a função:

$$\begin{aligned} \text{fromMaybe} & :: a \rightarrow \text{Maybe } a \rightarrow a \\ \text{fromMaybe } a & = [\underline{a}, id] \cdot \text{out} \end{aligned}$$

Derive a versão *pointwise* de fromMaybe por forma a não recorrer ao combinador de alternativa (vulg. ‘either’) de funções nem a funções constantes.

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos com reticências):

$$\begin{aligned} & \text{fromMaybe } a = [\underline{a}, id] \cdot \text{out} \\ \equiv & \{ \text{in / out; } \text{inMaybe} \} \\ & \text{fromMaybe } a \cdot [\underline{\text{Nothing}}, \text{Just}] = [\underline{a}, id] \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \text{fromMaybe } a \cdot \underline{\text{Nothing}} = \underline{a} \\ \text{fromMaybe } a \cdot \text{Just} = id \end{cases} \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \begin{cases} \text{fromMaybe } a \text{ Nothing} = a \\ \text{fromMaybe } a (\text{Just } a') = a' \end{cases} \end{aligned}$$

□

Questão 6 Demonstre a lei do condicional de McCarthy que se segue,

$$p \rightarrow a, (q \rightarrow a, b) = (p \vee q) \rightarrow a, b$$

sabendo que

$$(p \vee q)? = p \rightarrow i_1, q? \tag{E2}$$

é uma propriedade da disjunção de predicados.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á, pegando no lado direito da igualdade a provar:

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \rightarrow a, b \\ = & \{ \dots\dots\dots \} \\ & [a, b] \cdot (p \rightarrow i_1, q?) \\ = & \{ \dots\dots\dots \} \\ & p \rightarrow ([a, b] \cdot i_1), ([a, b] \cdot q?) \\ = & \{ \dots\dots\dots \} \\ & p \rightarrow a, (q \rightarrow a, b) \end{aligned}$$

□

□

Questão 7 Nas aulas foi demonstrada a propriedade:

$$\overline{f \cdot (g \times h)} = \overline{\text{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g \tag{E3}$$

Aplique variáveis a ambos os lados de (E3) e confirme que obtém o mesmo resultado.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned} & \overline{f \cdot (g \times h)} a = \overline{\text{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g a \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \overline{f \cdot (g \times h)} a = \overline{\text{ap} \cdot (id \times h)} (\overline{f} (g a)) \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & \overline{f \cdot (g \times h)} a b = \overline{\text{ap} \cdot (id \times h)} (\overline{f} (g a)) b \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & (f \cdot (g \times h)) (a, b) = (\text{ap} \cdot (id \times h)) (\overline{f} (g a), b) \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \\ & f (g a, h b) = \text{ap} (\overline{f} (g a), h b) \\ \equiv & \{ \dots\dots\dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f(g\ a, h\ b) = \bar{f}(g\ a)\ (h\ b) \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& f(g\ a, h\ b) = f(g\ a, h\ b)
\end{aligned}$$

□

Questão 8 Considere o ciclo:

$$h = \text{for } \langle \text{succ} \cdot \pi_1, \text{mul} \rangle (1, 1) \tag{E4}$$

Recordando

$$\text{for } b\ i = \langle [i, b] \rangle \tag{E5}$$

mostre, por aplicação da lei de fusão

$$f \cdot \langle g \rangle = \langle h \rangle \iff f \cdot g = h \cdot (id + f) \tag{E6}$$

que a igualdade

$$\pi_1 \cdot h = \text{for succ } 1$$

se verifica.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned}
& \pi_1 \cdot h = \text{for succ } 1 \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \pi_1 \cdot \langle [(1, 1), \langle \text{succ} \cdot \pi_1, \text{mul} \rangle] \rangle = \langle [1, \text{succ}] \rangle \\
\Leftarrow & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \pi_1 \cdot [(1, 1), \langle \text{succ} \cdot \pi_1, \text{mul} \rangle] = [1, \text{succ}] \cdot (id + \pi_1) \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& [\pi_1 (1, 1), \text{succ} \cdot \pi_1] = [1, \text{succ} \cdot \pi_1] \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \text{TRUE}
\end{aligned}$$

□