Cálculo de Programas

3.º Ano de LEI+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2024/25

1º Teste — 26 de Outubro de 2024, 09h00–11h00
Salas E2-1.01 + E2-1.03 + E2-1.05

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Inferir o tipo mais geral de $\alpha = \langle i_1, \pi_1 \rangle$ e, a partir dele, a propriedade grátis de α.

RESOLUÇÃO: Comecemos por tipar i_1 e π_1 separadamente:

$$\begin{cases} i_1 : A \to A + B \\ \pi_1 : C \times D \to E \end{cases}$$

Por $\alpha = \langle i_1, \pi_1 \rangle$ de imediato inferimos $A = C \times D$ e, assim:

$$\alpha = \langle i_1, \pi_1 \rangle : (C \times D) \to ((C \times D + B) \times C)$$

Logo, pelo método baseado em diagrama do costume (fazer) a propriedade grátis é:

$$((f \times g + h) \times f) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f \times g)$$

□

Questão 2 Considere a seguinte sessão no GHCi, uma vez aberta a biblioteca $Cp.hs$:

```
*Cp> data T = One Int | Two Bool Int
*Cp> :t One
One :: Int -> T
*Cp> :t Two
Two :: Bool -> Int -> T
```

Com base no diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T} \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}=\mathsf{in}^\circ"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \mathsf{Int} + \mathsf{Bool} \times \mathsf{Int} \arrow[ll, bend left, "\mathsf{in}"] \end{tikzcd}$$

defina in e calcule out a partir da cláusula $\mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id$.

RESOLUÇÃO: Temos $\mathsf{in} : \mathsf{Int} + \mathsf{Bool} \times \mathsf{Int} \to \mathsf{T}$, pelo que se obtém:

$$\mathsf{in} = [\mathit{One}\,, \widehat{\mathit{Two}}]$$

Então:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathsf{out} \cdot \mathsf{in} = id \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & [\mathsf{out} \cdot \mathit{One}\,, \mathsf{out} \cdot \widehat{\mathit{Two}}] = id \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \begin{cases} \mathsf{out} \cdot \mathit{One} = i_1 \\ \mathsf{out} \cdot \widehat{\mathit{Two}} = i_2 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \begin{cases} \mathsf{out}\ (\mathit{One}\ i) = i_1\ i \\ \mathsf{out}\ (\mathit{Two}\ b\ i) = i_2\ (b, i) \end{cases}
\end{array}
$$

□

Questão 3 O combinador

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{const}\ :: a \to b \to a \\
\mathsf{const}\ a\ b = a
\end{array}
$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Resolva em ordem a k a equação seguinte:

$$\underline{k} \quad = \quad \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{E1}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{k} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \begin{cases} \pi_1 \cdot \underline{k} = \underline{b} \\ \pi_2 \cdot \underline{k} = \underline{a} \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \begin{cases} \underline{\pi_1\ k} = \underline{b} \\ \underline{\pi_2\ k} = \underline{a} \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \begin{cases} \pi_1\ k = b \\ \pi_2\ k = a \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \text{ mudança de variável } k := (x, y) \ \} \\
 & \begin{cases} \pi_1\ (x, y) = b \\ \pi_2\ (x, y) = a \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}
\end{array}
$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = b \\ y = a \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$k = (b, a)$$

□

Questão 4 Demonstre a lei:

$$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ definição de } f + g \text{ duas vezes (21) } \}$$

$$[i_1 \cdot g \cdot h , i_2 \cdot i \cdot j] = [i_1 \cdot g , i_2 \cdot i] \cdot (h + j)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ absorção-+ (22) } \}$$

$$[i_1 \cdot g \cdot h , i_2 \cdot i \cdot j] = [i_1 \cdot g \cdot h , i_2 \cdot i \cdot j]$$

□

Questão 5 Recorde o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} \mathit{Maybe}\ B \arrow[r, bend left, "\mathsf{out} = \mathsf{in}^{\circ}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & 1 + B \arrow[l, bend left, "\mathsf{in} = {[\underline{\mathsf{Nothing}}\ , \mathsf{Just}]}"] \end{tikzcd}$$

e considere a função:

$$\begin{array}{l} \mathsf{fromMaybe} :: a \rightarrow \mathit{Maybe}\ a \rightarrow a \\ \mathsf{fromMaybe}\ a = [\underline{a} , id] \cdot \mathsf{out} \end{array}$$

Derive a versão *pointwise* de fromMaybe por forma a não recorrer ao combinador de alternativa (vulg. ‘either’) de funções nem a funções constantes.

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos com reticências):

$$\mathsf{fromMaybe}\ a = [\underline{a} , id] \cdot \mathsf{out}$$

$$\equiv \quad \{ \ \mathsf{in}\ /\ \mathsf{out};\ \mathit{inMaybe} \ \}$$

$$\mathsf{fromMaybe}\ a \cdot [\underline{\mathsf{Nothing}} , \mathsf{Just}] = [\underline{a} , id]$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathsf{fromMaybe}\ a \cdot \underline{\mathsf{Nothing}} = \underline{a} \\ \mathsf{fromMaybe}\ a \cdot \mathsf{Just} = id \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathsf{fromMaybe}\ a\ \mathsf{Nothing} = a \\ \mathsf{fromMaybe}\ a\ (\mathsf{Just}\ a') = a' \end{array}\right.$$

$\square$

Questão 6 Demonstre a lei do condicional de McCarthy que se segue,

$$p \to a \; , \; (q \to a \; , \; b) \quad = \quad (p \vee q) \to a \; , \; b$$

sabendo que

$$(p \vee q)? \quad = \quad p \to i_1 \; , \; q? \tag{E2}$$

é uma propriedade da disjunção de predicados.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á, pegando no lado direito da igualdade a provar:

$$
\begin{array}{cl}
& (p \vee q) \to a \; , \; b \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& [a \, , b] \cdot (p \to i_1 \; , \; q?) \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& p \to ([a \, , b] \cdot i_1) \; , \; ([a \, , b] \cdot q?) \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& p \to a \; , \; (q \to a \; , \; b)
\end{array}
$$

$\square$

$\square$

Questão 7 Nas aulas foi demonstrada a propriedade:

$$\overline{f \cdot (g \times h)} \; = \; \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g \tag{E3}$$

Aplique variáveis a ambos os lados de (E3) e confirme que obtém o mesmo resultado.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{cl}
& \overline{f \cdot (g \times h)} \; a = (\overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \cdot \overline{f} \cdot g) \; a \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f \cdot (g \times h)} \; a = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \; (\overline{f} \; (g \; a)) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \overline{f \cdot (g \times h)} \; a \; b = \overline{\mathsf{ap} \cdot (id \times h)} \; (\overline{f} \; (g \; a)) \; b \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (f \cdot (g \times h)) \; (a, b) = (\mathsf{ap} \cdot (id \times h)) \; (\overline{f} \; (g \; a), b) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& f \; (g \; a, h \; b) = \mathsf{ap} \; (\overline{f} \; (g \; a), h \; b) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}
\end{array}
$$

$$f\ (g\ a, h\ b) = \overline{f}\ (g\ a)\ (h\ b)$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$f\ (g\ a, h\ b) = f\ (g\ a, h\ b)$$

□

Questão 8 Considere o ciclo:

$$h = \mathsf{for}\ \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \mathsf{mul} \rangle\ (1, 1) \tag{E4}$$

Recordando

$$\mathsf{for}\ b\ i = (\!|\, [\underline{i}, b]\, |\!) \tag{E5}$$

mostre, por aplicação da lei de fusão

$$f \cdot (\!|\, g\, |\!) = (\!|\, h\, |\!) \quad \Leftarrow \quad f \cdot g = h \cdot (id + f) \tag{E6}$$

que a igualdade

$$\pi_1 \cdot h = \mathsf{for}\ \mathsf{succ}\ 1$$

se verifica.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\pi_1 \cdot h = \mathsf{for}\ \mathsf{succ}\ 1$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\pi_1 \cdot (\!|\, [\underline{(1,1)}, \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \mathsf{mul} \rangle]\, |\!) = (\!|\, [\underline{1}, \mathsf{succ}]\, |\!)$$

$$\Leftarrow \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\pi_1 \cdot [\underline{(1,1)}, \langle \mathsf{succ} \cdot \pi_1, \mathsf{mul} \rangle] = [\underline{1}, \mathsf{succ}] \cdot (id + \pi_1))$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$[\underline{\pi_1\ (1,1)}, \mathsf{succ} \cdot \pi_1]) = [\underline{1}, \mathsf{succ} \cdot \pi_1]$$

$$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$$

$$\textsc{True}$$

□
