Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

2º Teste — 15 de Maio de 2024, 16h00–18h00
Salas 0.03 + 0.05 do Edifício 2

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
B \times (A+C) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[r, bend left, "\mathsf{distr}"] \arrow[rr, bend left=60, "\mathsf{iso}^\circ"] & \cdots \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] & A \times B + B \times C \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[ll, bend left=60, "\mathsf{iso}"]
\end{tikzcd}$$

(a) Defina o isomorfismo β; (b) Infira a propriedade grátis de α sem o definir.

RESOLUÇÃO: Partindo do tipo de distr, tem-se:

$$\begin{tikzcd}
B \times (A+C) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[r, bend left, "\mathsf{distr}"] \arrow[rr, bend left=60, "\mathsf{iso}^\circ"] & B \times A + B \times C \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[l, bend left, "\mathsf{undistr}"] & A \times B + B \times C \arrow[l, bend left, "\beta"] \arrow[ll, bend left=60, "\mathsf{iso}"]
\end{tikzcd}$$

(a) Do tipo de β inferimos $\beta = \mathsf{swap} + id$.
(b) Do tipo $\alpha : B \times A + B \times C \to A \times B + B \times C$ infere-se, pelo método habitual, a propriedade grátis:

$$(f \times g + g \times h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (g \times f + g \times h)$$

□

Questão 2 Demonstrar

$$(p \to g\ ,\ h) \times f \quad = \quad p \cdot \pi_1 \to g \times f\ ,\ h \times f$$

a partir das leis do condicional de McCarthy e do facto seguinte:

$$q \to f \;,\; f \;=\; f \tag{E1}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{array}{ll}
& p \cdot \pi_1 \to g \times f \;,\; h \times f \\
= & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& [\langle g \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle, \langle h \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle] \cdot (p \cdot \pi_1)? \\
= & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \langle [g \cdot \pi_1 , h \cdot \pi_1], [f \cdot \pi_2 , f \cdot \pi_2] \rangle \cdot (p \cdot \pi_1)? \\
= & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \langle [g \cdot \pi_1 , h \cdot \pi_1] \cdot (p \cdot \pi_1)?, [f \cdot \pi_2 , f \cdot \pi_2] \cdot (p \cdot \pi_1)? \rangle \\
= & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \langle (p \cdot \pi_1 \to g \cdot \pi_1 \;,\; h \cdot \pi_1), (p \cdot \pi_1 \to f \cdot \pi_2 \;,\; f \cdot \pi_2) \rangle \\
= & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \langle (p \to g \;,\; h) \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle \\
= & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (p \to g \;,\; h) \times f
\end{array}$$

$\square$

Questão 3 A função $\pi_2 : A \times B \to B$ é binária e, como tal, faz sentido a sua versão "curried" $\overline{\pi_2} : A \to B^B$. Usando as leis da exponenciação mostre que $\overline{\pi_2}$ é uma função constante, isto é, que qualquer que seja f se tem:

$$\overline{\pi_2} \cdot f = \overline{\pi_2} \tag{E2}$$

Que função constante é essa? Justifique.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{array}{ll}
& \overline{\pi_2} \cdot f = \overline{\pi_2} \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal } \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\overline{\pi_2} \cdot f \times id) = \pi_2 \\
\equiv & \qquad \{ \text{ functor-}\times \text{ } \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\overline{\pi_2} \times id) \cdot (f \times id) = \pi_2 \\
\equiv & \qquad \{ \text{ cancelamento } \} \\
& \pi_2 \cdot (f \times id) = \pi_2 \\
\equiv & \qquad \{ \text{ natural } \pi_2 \text{ } \} \\
& \pi_2 = \pi_2
\end{array}$$

Pelo tipo $\overline{\pi_2} : A \to B^B$ infere-se que $\overline{\pi_2} = \underline{id}$, para $id : B \to B$. $\square$

Questão 4 As chamadas "rose trees", que se podem definir em Haskell por

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = \mathsf{Rose}\ a\ [\mathsf{Rose}\ a]$$

são árvores generalizadas em que cada nó tem um número arbitrário (mas finito) de sub-árvores. Defina para este tipo

- os isomorfismos in e out que o caracterizam;
- o functor de base B e o da recursividade F;
- o gene g do catamorfismo $(\!| g |\!)$ que conta o número de nós de uma "rose tree".

RESOLUÇÃO: Ver o módulo `Rose.hs` no material pedagógico. □

Questão 5 Recorra à lei de absorção-cata para demonstrar a propriedade

$$count \cdot (\mathsf{BTree}\ f) \quad = \quad count \tag{E3}$$

onde $\mathsf{BTree}\ A \xrightarrow{count} \mathbb{N}_0$ é o catamorfismo

$$count = (\!| [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ} \cdot \mathsf{add} \cdot \pi_2] |\!)$$

para $\mathsf{zero}\ \_ = 0$, $\mathsf{succ}\ n = n + 1$ e $\mathsf{add}\ (a, b) = a + b$. **NB:** recorda-se que a base do tipo BTree é $\mathsf{B}\ (f, g) = id + f \times (g \times g)$.

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{array}{ll}
& count \cdot (\mathsf{BTree}\ f) = count \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\!| [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ} \cdot \mathsf{add} \cdot \pi_2] |\!) \cdot (\mathsf{BTree}\ f) = count \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\!| [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ} \cdot \mathsf{add} \cdot \pi_2] \cdot (id + f \times id) |\!) = count \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\!| [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ} \cdot \mathsf{add} \cdot \pi_2 \cdot (f \times id)] |\!) = count \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\!| [\mathsf{zero}\,, \mathsf{succ} \cdot \mathsf{add} \cdot \pi_2] |\!) = count \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& true
\end{array}$$

□

Questão 6 Considere a seguinte generalização da lei de absorção-cata,

$$(\!|\, g \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!) = (\!|\, g \cdot \alpha \,|\!) \quad \Leftarrow \quad \mathsf{G}\, f \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathsf{F}\, f \tag{E4}$$

a que corresponde o diagrama que se dá ao lado. Use (E4) para demonstrar a igualdade

$$\mathsf{length} \cdot \mathsf{zeros} = id \tag{E5}$$

onde

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{T}_1 \arrow[d, "(\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!)"'] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, "\mathsf{in}_1"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\ (\!|\, \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \,|\!)"] \\
\mathsf{T}_2 \arrow[d, "(\!|\, g \,|\!)"'] & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\mathsf{in}_2"] \arrow[d, "\mathsf{G}\ (\!|\, g \,|\!)"] & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\mathsf{F}(\!|\, g \,|\!)"] \\
C & \mathsf{G}\ C \arrow[l, "g"] & \mathsf{F} C \arrow[l, "\alpha"]
\end{tikzcd} \tag{E6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{length} : A^* \to \mathbb{N}_0 \\ \mathsf{length} = (\!|\, \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2) \,|\!) \end{array} \right.$$

é uma função que conhece bem e onde $\mathsf{zeros}\ n$ é a lista finita de n zeros,

$$\begin{array}{l} \mathsf{zeros}\ 0 = [\,] \\ \mathsf{zeros}\ (n+1) = 0 : \mathsf{zeros}\ n \end{array}$$

isto é

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{zeros} : \mathbb{N}_0 \to {\mathbb{N}_0}^* \\ \mathsf{zeros} = (\!|\, \mathsf{in}_* \cdot (id + \langle \underline{0}, id \rangle) \,|\!) \end{array} \right. \tag{E7}$$

para $\mathsf{in}_* = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}]$ e $\mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{0}\,, \mathsf{succ}]$. **NB:** recordar das aulas $\mathsf{F}\ f = id + f$ e $\mathsf{G}\ f = id + id \times f$, a usar em (E4).

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{array}{cl}
& \mathsf{length} \cdot \mathsf{zeros} = id \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (\!|\, \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2) \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in}_* \cdot (id + \langle \underline{0}, id \rangle) \,|\!) = id \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (\!|\, \underbrace{\mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2)}_{g} \,|\!) \cdot (\!|\, \mathsf{in}_* \cdot \underbrace{id + \langle \underline{0}, id \rangle}_{\alpha} \,|\!) = (\!|\, \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot id \,|\!) \\
\Leftarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \left\{ \begin{array}{l} (id + \pi_2) \cdot (id + \langle \underline{0}, id \rangle) = id \\ \mathsf{G}\ f \cdot (id + \langle \underline{0}, id \rangle) = (id + \langle \underline{0}, id \rangle) \cdot \mathsf{F}\ f \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \left\{ \begin{array}{l} id + id = id \\ (id + id \times f) \cdot (id + \langle \underline{0}, id \rangle) = (id + \langle \underline{0}, id \rangle) \cdot (id + f) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& id + \langle \underline{0}, f \rangle = id + \langle \underline{0}, f \rangle \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \mathit{true}
\end{array}$$

□

Questão 7 Considere o anamorfismo $r = [\!(\, g \,)\!]$ onde

$$\begin{array}{l} g\ [\,] = i_1\ () \\ g\ x = i_2\ (\mathsf{last}\ x, \mathsf{init}\ x) \end{array}$$

$\mathsf{last}\ x$ dá o último elemento da lista x e $\mathsf{init}\ x$ dá x sem esse último elemento. O que faz a função r? Acompanhe a sua resposta com o diagrama de r.

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[d, "r"'] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & 1 + A \times A^* \arrow[ll, bend left, "{[\mathsf{nil}\ ,\mathsf{cons}]}"] \arrow[d, "id+id\times r"] \\
B & & 1 + A \times A^* \arrow[ll, bend left, "{[\mathsf{nil}\ ,\mathsf{cons}]}"]
\end{tikzcd}
$$

Como g vai buscar o último elemento e o início, e não o primeiro e a cauda, $r = [(g)]$ faz a inversão da lista de entrada. $\square$

Questão 8 Considere a seguinte extensão da lei de recursividade mútua a hilomorfismos que partilham o mesmo anamorfismo:

$$
\langle f, g \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \cdot [(q)] \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \end{array} \right. \tag{E8}
$$

- Para uma dada função q, (E8) reduz-se à lei de recursividade mútua do formulário. Identifique essa função q, justificando.
- Apresente as justificações em falta no seguinte cálculo da lei (E8):

$$
\begin{array}{ll}
& \langle f, g \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \cdot [(q)] \\
\equiv & \quad \{ \ \text{seja } \langle \alpha, \beta \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \ \} \\
& \langle f, g \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot [(q)] \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot [(q)], \beta \cdot [(q)] \rangle \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = \alpha \cdot [(q)] \\ g = \beta \cdot [(q)] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [(q)] \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [(q)] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [(q)] \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [(q)] \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [(q)], \beta \cdot [(q)] \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [(q)], \beta \cdot [(q)] \rangle \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \end{array} \right.
\end{array}
$$

$\square$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

- A lei de reflexão-ana diz-nos que $[\![\mathsf{out}]\!] = id$. Basta fazer $q = \mathsf{out}$ em (E8) e simplificar.
- Justificações em falta no cálculo da lei (E8): faça-se

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \tag{E9}$$

o que, pela lei de Fokkinga, garante:

$$\begin{cases} \alpha \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha, \beta \rangle \\ \beta \cdot in = k \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha, \beta \rangle \end{cases} \tag{E10}$$

Então:

$$\begin{array}{cl}
& \langle f, g \rangle = (\!|\, \langle h, k \rangle \,|\!) \cdot [\![\, q \,]\!] \\
\equiv & \qquad \{ \text{ (E9); fusão-}\times \ \} \\
& \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot [\![\, q \,]\!], \beta \cdot [\![\, q \,]\!] \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ Eq-}\times \ \} \\
& \begin{cases} f = \alpha \cdot [\![\, q \,]\!] \\ g = \beta \cdot [\![\, q \,]\!] \end{cases} \\
\equiv & \qquad \{ \text{ (E10); isomorfismo } \mathsf{in} \,/\, \mathsf{out} \ \} \\
& \begin{cases} f = h \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\![\, q \,]\!] \\ g = k \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\![\, q \,]\!] \end{cases} \\
\equiv & \qquad \{ \text{ cancelamento-ana } \times 2 \ \} \\
& \begin{cases} f = h \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\, [\![\, q \,]\!] \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\, [\![\, q \,]\!] \cdot q \end{cases} \\
\equiv & \qquad \{ \text{ functor } \mathsf{F} \text{ e fusão-}\times\text{, nas duas igualdades } \} \\
& \begin{cases} f = h \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha \cdot [\![\, q \,]\!], \beta \cdot [\![\, q \,]\!] \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\, \langle \alpha \cdot [\![\, q \,]\!], \beta \cdot [\![\, q \,]\!] \rangle \cdot q \end{cases} \\
\equiv & \qquad \{ \text{ cf. } \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot [\![\, q \,]\!], \beta \cdot [\![\, q \,]\!] \rangle \text{ acima } \} \\
& \begin{cases} f = h \cdot \mathsf{F}\, \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\, \langle f, g \rangle \cdot q \end{cases} \\
\Box &
\end{array}$$

$\Box$