

Cálculo de Programas

3/2.º Ano de LEI/MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

Exame de Recurso — 15 de Janeiro de 2024, 14h00–16h00
Salas 1.03 + 1.07 do Edifício 2.

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.*

Questão 1 Recorra às leis que conhece dos produtos, coprodutos e funções constantes para demonstrar a igualdade:

$$[\langle f, \underline{k} \rangle, \langle g, \underline{k} \rangle] = \langle [f, g], \underline{k} \rangle \quad (\text{E1})$$

RESOLUÇÃO: Propõe-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{aligned} & [\langle f, \underline{k} \rangle, \langle g, \underline{k} \rangle] \\ = & \{ \dots \} \\ & \langle [f, g], [\underline{k}, \underline{k}] \rangle \\ = & \{ \dots \} \\ & \langle [f, g], \underline{k} \cdot [id, id] \rangle \\ = & \{ \dots \} \\ & \langle [f, g], \underline{k} \rangle \end{aligned}$$

□

Questão 2 Infira o tipo mais geral da função α definida por

$$\alpha = [(\langle id, nil \rangle), id \times \text{sing}] \quad (\text{E2})$$

onde $nil _ = []$ e $\text{sing}! x = [x]$. De seguida, derive desse tipo a propriedade grátis de α .

RESOLUÇÃO: Começemos por:

- $id: A \rightarrow A$

- $nil : B \rightarrow C^*$
- $id : K \rightarrow K$
- $singl : E \rightarrow E^*$

Então:

- $\langle id, nil \rangle$ força $B = A$, i.e. $\langle id, nil \rangle : A \rightarrow A \times C^*$
- $id \times singl : K \times E \rightarrow K \times E^*$

Finalmente:

- $\alpha : A + (A \times C) \rightarrow (A \times C^*)$

Propriedade grátis (fazer diagrama e inferir):

$$(f \times \text{map } h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f + f \times h)$$

□

Questão 3 Seja dada uma função de ordem superior α que satisfaz a propriedade:

$$\widehat{\alpha f} = \widehat{f} \cdot \text{swap} \tag{E3}$$

Mostre, usando as propriedades da exponenciação, que

$$\alpha (\alpha f) = f$$

se verifica.

RESOLUÇÃO: Tem-se de imediato que $\alpha f = \widehat{f} \cdot \text{swap}$ — α é a função flip \cdot . De seguida:

$$\begin{aligned} & \alpha (\widehat{f \cdot \text{swap}}) = f \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & \widehat{(\widehat{f \cdot \text{swap}}) \cdot \text{swap}} = f \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & \widehat{\widehat{f \cdot \text{swap}} \cdot \text{swap}} = f \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & f = f \end{aligned}$$

□

Questão 4 A seguinte questão apareceu num teste anterior desta disciplina:

Considere a estrutura de dados que se segue, estudada nas aulas:

Árvores com informação de tipo A nos nós :

$$T = \text{BTree } A \quad \begin{cases} B(X, Y) = 1 + X \times Y^2 \\ B(g, f) = id + g \times f^2 \end{cases} \quad \text{in} = [\text{Empty}, \text{Node}]$$

Haskell: `data BTree a = Empty | Node (a, (BTree a, BTree a))`

Defina como um catamorfismo a função

$$\begin{aligned} f & : \text{BTree } A \rightarrow A^* \\ f & = (g) \end{aligned}$$

isto é, identifique g tal que $f t$ seja o caminho a percorrer na árvore t para atingir o seu nó terminal mais à direita.

Uma das respostas que apareceram ao corrigir esse teste foi

$$g = [\text{nil}, \pi_1 \cdot \pi_2] \tag{E4}$$

Mostre que $f = \langle [\text{nil}, \pi_1 \cdot \pi_2] \rangle$ é uma função constante, calculando-a usando as leis do cálculo de programas.

RESOLUÇÃO: Resolvendo $\underline{k} = \langle g \rangle$ para o g dado obtém-se $k = []$ isto é $f = \text{nil}$:

$$\underline{k} = \langle [\text{nil}, \pi_1 \cdot \pi_2] \rangle$$

$$\{ \dots \}$$

$$\underline{k} \cdot \text{in} = ([\text{nil}, \pi_1 \cdot \pi_2] \cdot (\text{id} + \text{id} \times \underline{k}^2))$$

$$\{ \dots \}$$

$$\underline{k} = [\text{nil}, \pi_1 \cdot (\underline{k} \times \underline{k}) \cdot \pi_2]$$

$$\{ \dots \}$$

$$\underline{k} = [\text{nil}, \underline{k}]$$

$$\{ \dots \}$$

$$\underline{k} = \text{nil}$$

□

Questão 5 Mostre que o catamorfismo

$$k = \langle (m \times n) \cdot \langle F \pi_2, F \pi_1 \rangle \rangle \tag{E5}$$

se pode decompor em duas funções f e g tal que:

$$\begin{cases} f \cdot \text{in} = m \cdot F g \\ g \cdot \text{in} = n \cdot F f \end{cases}$$

Sugestão: resolva em ordem a f e g a equação

$$\langle f, g \rangle = k$$

onde k é o catamorfismo dado.

RESOLUÇÃO: Justificar os passos que são dados no raciocínio seguinte:

$$\langle f, g \rangle = \langle (m \times n) \cdot \langle F \pi_2, F \pi_1 \rangle \rangle$$

$$\equiv \{ \dots \}$$

$$\langle f, g \rangle = \langle m \cdot F \pi_2, n \cdot F \pi_1 \rangle$$

$$\equiv \{ \dots \}$$

$$\begin{cases} f \cdot \text{in} = m \cdot F \pi_2 \cdot F \langle f, g \rangle \\ g \cdot \text{in} = n \cdot F \pi_1 \cdot F \langle f, g \rangle \end{cases}$$

$$\equiv \{ \dots \}$$

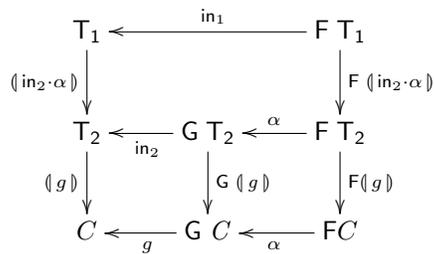
$$\begin{cases} f \cdot \text{in} = m \cdot F g \\ g \cdot \text{in} = n \cdot F f \end{cases}$$

□

Questão 6 Considere a seguinte generalização de um resultado que foi abordado nas aulas teórico-práticas,

$$\langle g \rangle \cdot \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle = \langle g \cdot \alpha \rangle \iff G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \quad (\text{E6})$$

a que corresponde o diagrama:



Apresente uma demonstração analítica de (E6).

RESOLUÇÃO: Justificar os passos que são dados no raciocínio seguinte:

$$\begin{aligned}
 & \langle g \rangle \cdot \langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle = \langle g \cdot \alpha \rangle \\
 \Leftarrow & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \langle g \rangle \cdot \text{in}_2 \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot F \langle g \rangle \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & g \cdot G \langle g \rangle \cdot \alpha = g \cdot \alpha \cdot F \langle g \rangle \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & g \cdot \alpha \cdot F \langle g \rangle = g \cdot \alpha \cdot F \langle g \rangle \\
 \equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
 & \text{true} \\
 & \square
 \end{aligned}$$

□

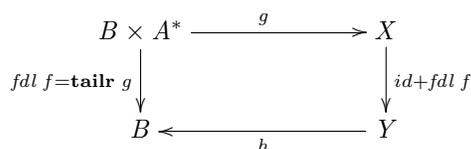
Questão 7 Conheça com certeza, de Programação Funcional, a função:

$$\begin{cases}
 \text{foldl} :: (b \rightarrow a \rightarrow b) \rightarrow b \rightarrow [a] \rightarrow b \\
 \text{foldl } f \ z \ [] = z \\
 \text{foldl } f \ z \ (h : t) = \text{foldl } f \ (f \ z \ h) \ t
 \end{cases}$$

Pode mostrar-se que $\widehat{\text{foldl}} f = fdl f$ onde

$$\begin{cases}
 fdl f \ (z, []) = z \\
 fdl f \ (z, h : t) = fdl f \ (f \ z \ h, t)
 \end{cases}$$

Pretendendo-se agora mostrar que $fdl f$ é um “ciclo-while disfarçado”, para $f : B \rightarrow A \rightarrow B$, encontre g, h, X e Y no diagrama



$$\begin{aligned}
& \begin{cases} f \cdot \text{Leaf} = \text{dup} \\ f \cdot \text{Fork} = \mu \cdot (f \times f) \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \begin{cases} f (\text{Leaf } a) = (a, a) \\ f \cdot \text{Fork} = (\pi_1 \cdot f \times \pi_2 \cdot f) \end{cases} \\
\equiv & \quad \{ \dots\dots\dots \} \\
& \begin{cases} f (\text{Leaf } a) = (a, a) \\ f (\text{Fork } (t_1, t_2)) = (\pi_1 (f t_1), \pi_2 (f t_2)) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
f (\text{Leaf } a) &= (a, a) \\
f (\text{Fork } (t_1, t_2)) &= (l, r) \textbf{ where} \\
(l, x) &= f t_1 \\
(r, x) &= f t_2
\end{aligned}$$

Logo f dá as folhas extremas da árvore argumento. \square