Comportamento e Estado

Maria João Gomes Frade*

Mestrado em Informática

Área de Ciências de Computação

17 de Janeiro de 1995

Departamento de Informática

Universidade do Minho

*Bolseira BM / 1880 / 91 - IA - JNICT

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma nova forma de especificar o comportamento de sistemas computacionais usando, para isso, uma lógica com características especiais.

A unidade básica de especificação do comportamento é o *agente*, que formalmente é um sistema lógico. A linguagem lógica dos agentes permite exprimir o relacionamento entre a ocorrência de eventos e as propriedades exibidas pelo agente. Os eventos são entendidos como conectivas lógicas e as asserções lógicas reflectem a noção de causalidade entre eventos e propriedades – a *causa essencial* de uma propriedade face a um evento.

Devido a estarmos interessados em saber que encadeamento de eventos "justifica" uma dada propriedade, temos traços que evoluem do passado para o presente. A nossa perspectiva é a de saber que comportamento poderá justificar as características de um agente num dado instante. Como é óbvio, essas características condicionam o comportamento futuro do agente e essa dependência é expressa num sistema de dedução que reflecte a noção de causa.

No intuíto de caracterizar semanticamente os agentes, é feita a ligação entre o sistema lógico e os seus modelos topológicos. A dualidade de Stone assegura a sintonia entre o sistema lógico e a sua semântica, e faculta-nos duas perspectivas: a perspectiva algébrica da lógica e a perspectiva topológica.

São apresentados dois tipos de modelos para os agentes: os *modelos de traços*, pertencentes à classe das semânticas denotacionais, intimamente ligados à noção de evento e traço; e os *modelos de estados*, pertencentes à classe das semânticas operacionais, baseados na noção de estado e transição de estado.

Estabelece-se uma relação entre estes dois tipos de modelos: iremos ver como poderemos obter um modelo de estados, partindo de um modelo de traços. Os estados surgem aqui como classes de equivalência de comportamentos passados. São também estudadas as propriedades dos modelos assim gerados. Nomeadamente, é feita uma análise de como propriedades topológicas – tais como: condições de separação, sobriedade ou coerência – caracterizam o espaço de estados de tais modelos, e de como a partir do comportamento se consegue gerar o espaço de estados mínimo.

Abstract

In this work we introduce a formalism for specifying the behaviour of computational systems, based on logic.

Our basic unit of software specification is called *agent* and is nothing more than a particular logical system. The agent logical language allow us to express the relationship between the occurrence of events and the properties an agent exhibits. The events are seen as logical connectives and the logical assertions reflect the causality between events and properties - the *essential cause* of a property in face of an event.

Because we are interested in knowing which sequence of events "justify" a property, we have traces coming from the past to the present. Our perspective is that of knowing which behaviour could justify the characteristics of an agent in some instant. Obviously, these characteristics will condition the future behaviour of the agent. This dependency is expressed in a deduction system that reflects the notion of causality.

For the purpose of characterizing the agents semantically a connection is made between the logical system and its topological models. The Stone duality provides a junction between the logical system and its semantics and it provides two alternative perspectives: the algebraic or logical perspective and the topological perspective.

We present two types of models for the agents: the trace model, a denotational model intimately connected to the notion of event and trace, and the state model, an operational model based on the notions of state and state transitions.

We establish a relation between these two types of models: we see how a state model may be obtained from a trace model. The states arise as equivalence classes of past behaviours. We also study the properties of the state models which result from the conversion of trace models. We see how topological properties – such as separation conditions, soberty and coherence – characterize the state space of these models, and how from behaviour we can generate a minimal state space.

Aos meus Pais.

Agradecimentos

Queria deixar expresso os meus mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas que de alguma forma me apoiaram no decorrer deste trabalho, em especial: ao Professor Valença, pelo seu entusiasmo e empenho; à JNICT pela bolsa que me concedeu na primeira fase do mestrado; a todos os meus colegas pelo incentivo e companheirismo; a toda a minha família por todo apoio e compreensão; ao Zé pela compreensão, incentivo e apoio nos momentos mais difíceis.

"O Tempo, como o Mundo, tem dois hemisférios: um superior e visível, que é o passado, outro inferior e invisível, que é o futuro. No meio de um e outro hemisfério ficam os horizontes do tempo, que são estes instantes do presente que imos vivendo, onde o passado se termina e o futuro começa."

P.^{e} António Vieira (1608 - 1697)

Índice

1 Introdução

O trabalho apresentado nesta dissertação tem por base as ideias desenvolvidas pelo Professor Valença acerca de uma nova forma de especificar o comportamento de sistemas computacionais usando, para isso, uma lógica com características especiais. É portanto, um primeiro passo nesta nova abordagem da especificação do comportamento. Temos consciência de que não vamos esgotar este tema, muitas portas ficarão abertas para futuros desenvolvimentos.

Vamos apresentar um formalismo que nos permite descrever e raciocinar acerca do comportamento de sistemas complexos. Uma técnica usual de "dominar" a complexidade de um sistema, consiste na sua decomposição em componentes mais simples e adaptados à nossa necessidade de abstracção. É claro que cada um destes componentes deverá ter uma identidade própria que é mantida ao longo do tempo. Conservando a designação clássica nas teorias de sistemas comunicantes, designamos estas componentes por *agentes*.

O agente é, portanto, a unidade básica de especificação e usaremos a lógica para a sua descrição. Na realidade, os nossos agentes não serão mais do que sistemas lógicos. No entanto, a lógica dos agentes tem alguns aspectos particulares que a caracterizam.

Como seria de esperar, o conceito de evento e de sequências de eventos estão envolvidos na linguagem lógica do agente. Os eventos serão formalmente vistos como conectivas lógicas.

A linguagem lógica dos agentes irá permitir exprimir o relacionamento entre a ocorrência de eventos e as propriedades exibidas pelo agente. As asserções lógicas reflectem a noção de causalidade entre eventos e propriedades.

Devido a estarmos aqui interessados em saber que encadeamento de eventos "justifica" uma dada propriedade, vamos ter traços que evoluem do passado para o presente, e não traços que partem do presente para o futuro, como é mais usual. A nossa prespectiva é a de saber que comportamento poderá justificar as características de um agente num dado instante. Como é óbvio, essas características condicionam o comportamento futuro do agente e essa dependência será expressa por um conjunto de regras de inferência.

O sistema de dedução desta lógica tem características particulares que reflectem a noção de causa. Por esse motivo, a relação gerada pelas regras de inferência será denominada de *relação de causa*.

A lógica de um agente requer, evidentemente, o estudo da sua semântica. Para tal serão usadas noções topológicas e iremos ver como é possível usar essas noções para descrever o comportamento.

O envolvimento da topologia nas ciências de computação não é já muito recente. Nas ciências de computação, o interesse pela topologia foi introduzido por Scott [16, 15], a partir de 1970, com os seus estudos dos modelos do λ-calculus e das linguagens de programação. Mais tarde, Smyth [17] defendeu que a aplicação da topologia às ciências de computação não é um mero truque técnico. A topologia capta uma noção essencial de computação sob o lema *"conjuntos abertos são propriedades semidecidíveis"* [17]. Este ênfase dá aos abertos uma vida independente dos pontos do espaço topológico, e isto levou a que fossem feitas ligações à teoria dos locais, também designada de "topologia sem pontos" [7], na qual os conjuntos abertos se tornam os principais objectos de estudo. Conjuntamente, a noção de observação foi surgindo como base para a semântica comportamental dos sistemas.

O lema de Smyth implica que a topologia representa a lógica das propriedades semi-decidíveis. Uma ligeira modificação deste lema aparece em [1], "a lógica geométrica é a lógica das observações finitas".

A dualidade entre espaços topológicos e locais (vistos como lógicas) [7] - *dualidade de Stone* - está a assumir uma importância crescente na teoria da computação. No intuíto de caracterizar semanticamente os agentes, vamos algebrizar a sua lógica e fazer a ligação entre o sistema lógico e os seus modelos topológicos.

A dualidade de Stone fornece uma ligação entre a semântica e a lógica. Além disso, a lógica subjacente é geométrica, o que pode ser computacionalmente interpretado como a lógica das propriedades observáveis, isto é, propriedades cuja validade pode ser determinada com base numa quantidade finita de informação. A nossa unidade de informação é o evento observável.

Para a lógica definida por um agente serão apresentados dois tipos de modelos: os *modelos de traços* e os *modelos de estados*.

Os modelos de traços, como o próprio nome indica, serão modelos intímamente ligados à noção de evento e traço. Eles darão, de certo modo, uma visão extrínseca do agente encarando o comportamento como a sua capacidade de comunicar.

Os modelos de estados, por outro lado, serão modelos baseados na noção de estado e de transição de estado. Constituirão, portanto, uma forma mais natural de representar computações. Contrariamente aos modelos de traços, os modelos de estados representarão uma visão intrínseca do agente.

Os dois tipos de modelos apresentados para os agentes, correspondem aos dois métodos clássicos de dar semântica: semântica denotacional e semântica operacional.

Os modelos de traços podem ser classificados como pertencendo à classe das semânticas denotacionais enquanto que os modelos de estados pertencem à classe das semânticas operacionais.

Uma vez que para a mesma lógica vão ser definidos dois tipos de modelos de natureza diferente, iremos ver como esses dois tipos de modelos estão relacionados.

A semântica operacional é muitas vezes considerada como uma semântica mais básica e pode ser usada para testar a adequação da semântica denotacional. Portanto, estabelecer um relacionamento entre a semântica denotacional e a semântica operacional pode ser encarado como um teste de adequação ou correcção da semântica denotacional.

Iremos então ver como poderemos converter um modelo de traços num modelo de estados. Os estados surgirão assim como classes de equivalência de comportamentos passados.

Neste contexto será feita uma análise das propriedades dos modelos de estados assim gerados. Veremos como propriedades topológicas – tais como: condições de separação, a sobriedade, a coerência – caracterizam o espaço de estados de tais modelos, e como a partir do comportamento se consegue gerar o espaço de estados mínimo.

Organização

No capítulo 2 é feita, por razões de sistematização, uma apresentação resumida de algumas das principais definições e resultados acerca da teoria dos reticulados, topologia e teoria das categorias que serão posteriormente usadas.

No capítulo 3 faz-se a apresentação dos sistemas formais genéricos, da relação de consequência e das suas características. Definem-se formalmente os *agentes* como sistemas lógicos com características próprias e apresenta-se a noção de causa essencial e de relação de causa. Faz-se também a construção da álgebra que essa lógica gera.

No capítulo 4 é feito um estudo semântico para os agentes. Numa primeira fase fala-se de traços e propriedades observáveis para depois se fazer a caracterização semântica dos agentes, definindo-se uma topologia sobre o espaço de traços do agente – a *topologia intrínseca do agente*.

No capítulo 5 apresentam-se os modelos de traços dos agentes e colocamos tais modelos no contexto categorial, estabelecendo uma ordem entre modelos.

No capítulo 6 apresentam-se os modelos de estados dos agentes. Estuda-se o relacionamento entre os modelos de traços e os modelos de estados de um agente e faz-se a construção dos modelos de estados partindo dos modelos de traços. É também neste capítulo que será feita uma análise das propriedades topológicas destes modelos e das caracteristicas que essas propriedades imprimem no estado.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões e aspectos que deverão merecer a atenção em trabalho futuro sobre esta nova abordagem à especificação do comportamento.

2 Conceitos Matemáticos Preliminares

O tema desenvolvido ao longo deste trabalho requer alguma informação prévia acerca da teoria dos reticulados, topologia e teoria das categorias. Por razões de sistematização, apresentamos um breve resumo das principais definições e resultados. Mais detalhe pode ser obtido em [7, 18, 11, 13].

2.1 Reticulados

Seja A um conjunto e $\leq$ uma relação binária em A. A relação $\leq$ diz-se

- *reflexiva* se, $\forall a \in A,\ a \leq a$
- *transitiva* se, $a \leq b$ e $b \leq c \Rightarrow a \leq c$
- *simétrica* se, $a \leq b \Rightarrow b \leq a$
- *anti-simétrica* se, $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
- *total* se, $\forall a, b \in A,\ a \leq b$ ou $b \leq a$

Quando a relação $\leq$ é reflexiva, transitiva e anti-simétrica, $(A, \leq)$ é uma *ordem parcial.* Se $\leq$ também for total, $(A, \leq)$ diz-se uma *ordem total.* Quando $\leq$ é apenas reflexiva e transitiva, $(A, \leq)$ é uma *pré-ordem.* Uma *relação de equivalência* é uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva.

Sendo $(A, \leq)$ uma ordem parcial e $S \subseteq A$, um elemento $x \in A$ é um *limite superior* de S se $a \in S \Rightarrow a \leq x$. x é um *limite superior mínimo* (também designado de *supremo* ou *disjunção*) de S se x é um limite superior de S e

$$(\forall a \in S,\ a \leq y) \ \Rightarrow \ x \leq y$$

Este limite quando existe é único e representa-se por $\bigvee S$. $\bigvee\{a, b\}$ é normalmente representado por $a \vee b$. Chamaremos *elemento terminal* (ou *máximo*) ao elemento x que verifique $\forall a \in A, \quad a \leq x$. O elemento terminal quando existe é único e denota-se por 1.

Dualmente, $x \in A$ é um *limite inferior* de S se $a \in S \Rightarrow x \leq a$. x é um *limite inferior máximo* (também designado de *ínfimo* ou *conjunção*) de S se x é um limite inferior de S e

$$(\forall a \in S,\ y \leq a) \ \Rightarrow \ y \leq x$$

Este limite quando existe é único e representa-se por $\bigwedge S$. $\bigwedge\{a, b\}$ é normalmente representado por $a \wedge b$. Chamaremos *elemento inicial* (ou *mínimo*) ao elemento x que verifique $\forall a \in A, \quad x \leq a$. O elemento inicial quando existe é único e denota-se por 0.

Notação: Sendo $(A, \leq)$ uma ordem parcial, $x \in A$ e $X \subseteq A$,

$$\begin{array}{rcl}
\uparrow(x) & \doteq & \{a \in A \mid x \leq a\} \\
\downarrow(x) & \doteq & \{a \in A \mid a \leq x\} \\
\uparrow(X) & \doteq & \{a \in A \mid \exists x \in X : x \leq a\} \\
 & = & \bigcup\{\uparrow(x) \mid x \in X\} \\
\downarrow(X) & \doteq & \{a \in A \mid \exists x \in X : a \leq x\} \\
 & = & \bigcup\{\downarrow(x) \mid x \in X\}
\end{array}$$

Os conjuntos da forma $\uparrow(x)$ ou $\uparrow(X)$ são designados *conjuntos superiores*; os conjuntos da forma $\downarrow(x)$ ou $\downarrow(X)$ designam-se *conjuntos inferiores*.

Um *semi-reticulado disjuntivo* é um conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ em que cada par de elementos $a, b \in A$ tem supremo $a \vee b$ e tem elemento mínimo 0. Dualmente, define-se *semi-reticulado conjuntivo* como um conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ em que cada par de elementos $a, b \in A$ tem ínfimo $a \wedge b$ e tem elemento máximo 1.

Note-se que podemos definir semi-reticulado disjuntivo (conjuntivo) como um conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ em que todo o subconjunto finito $S \subseteq A$ tem supremo $\bigvee S$ (ínfimo $\bigwedge S$) pois $0 = \bigvee\{\}$ (pois $1 = \bigwedge\{\}$).

Um *homomorfismo de semi-reticulados disjuntivos* é uma função f que preserva o elemento 0 (i.e., $f(0) = 0$) e a operação $\vee$ (i.e., $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$).

Um *homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos* é uma função f que preserva o elemento 1 (i.e., $f(1) = 1$) e a operação $\wedge$ (i.e., $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$).

Um *reticulado* é um conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$ em que todo o subconjunto finito tem supremo e ínfimo. Equivalentemente, podemos definir reticulado como uma estrutura $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ em que: A é um conjunto; 0 e 1 são elementos distinguidos; a operação $\vee$ $(\wedge)$ é associativa, comutativa e idempotente, e tem 0 (1) como elemento neutro; e são válidas as seguintes leis da absorção:

$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad \text{e} \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

Um reticulado A é *completo* se todo o subconjunto de A tem um ínfimo; necessariamente terá também um supremo. Um reticulado é *distributivo* se verifica a propriedade $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Num reticulado, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ sse $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Um *homomorfismo de reticulados* é uma função que preserva os elementos distinguidos, 0 e 1, e as operações $\vee$ e $\wedge$.

Um *local* (ou *frame*)[1] é um reticulado distributivo com as seguintes propriedades adicionais:

- Para qualquer subconjunto $S \subseteq A$, existe $\bigvee S \in A$.
- As conjunções finitas distribuem pelas disjunções arbitrárias; ou seja

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}$$

[1] A designação *local* aplicada a reticulados completos satisfazendo a lei da distributividade infinita, é controversa.

Vickers [23] usa a designação "*frame*" para tais estruturas. Johnstone [7] porém, não lhes dá quaisquer nomes específicos: designa como "*frames*" os objectos da categoria que é definida por tais estruturas e que tem os homomorfismos, aqui designados de locais, como morfismos; designa porém por locais os objectos da categoria oposta - isto é, como os mesmos objectos mas morfismos em sentido oposto.

As designações "*local*" e "*frame*" são assim usadas por Johnstone para designar as mesmas estruturas, consoante são vistas como objectos de uma ou de outra categoria. Olhando apenas para as estruturas algébricas "per si" ambas as designações são justificáveis na literatura.

Neste trabalho, por questão de simplicidade e coerência com a terminologia usada no estudo topológico dos processos, vamos preferir a designação *local*.

Um *homomorfismo de locais* (ou *homomorfismo de frames*) é uma função f que preserva a estrutura inerente aos locais:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1 \quad , \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \quad \text{e} \quad f(\bigvee S) = \bigvee\{f(s) \mid s \in S\}$$

Seja A um reticulado e $a \in A$. Um elemento $x \in A$ que satisfaça $a \wedge x = 0$ e $a \vee x = 1$ chama-se *complemento* (ou *simétrico*) de a e representa-se por $\overline{a}$.

Num reticulado distributivo o complemento de um elemento, quando existe, é único.

Uma *álgebra booleana* é um reticulado distributivo em que todo o elemento tem complemento. Uma álgebra booleana de especial importância é a definida pelo conjunto $2 \doteq \{0, 1\}$ com a ordem $0 < 1$.

2.2 Ideais e Filtros

Seja $(A, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um subconjunto $S \subseteq A$ diz-se *dirigido* se é não vazio e todo o par de elementos de S tem um limite superior em S. $(A, \leq)$ é um *domínio indutivo* se todo o subconjunto dirigido $S \subseteq A$ tem supremo $\bigvee S$. Um domínio indutivo com elemento inicial é uma *ordem parcial completa.*

Seja $(A, \leq)$ uma ordem parcial completa. Um elemento $a \in A$ diz-se *finito* ou *compacto* se, para todo o conjunto dirigido $S \subseteq A$, $\; a \leq \bigvee S \;\Rightarrow\; \exists x \in S : a \leq x$. O conjunto de todos os elementos finitos de A é representado por B_A ou $K(A)$ e chama-se a *base* de A. A diz-se *algébrica* se todo o elemento de A for supremo de algum conjunto dirigido de elementos finitos de A; ou seja, $x \in A \;\Rightarrow\; \exists S \subseteq K(A) : x = \bigvee S$. Diz-se que A é *consistentemente completa* se todo o conjunto $X \subseteq A$ que tenha um elemento maximal, tem supremo. A é um *domínio de Scott* sse é algébrica, consistentemente completa e o conjunto $K(A)$ é contável.

Os elementos finitos de um reticulado completo formam um sub-semi-reticulado disjuntivo.

Notação: Sendo S e X conjuntos, escrevemos $S \subseteq_f X$ se S é um subconjunto finito de X. Denotamos por $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X e por $\mathcal{P}_f(X)$ o conjunto dos subconjuntos finitos de X.

Seja $(A, \leq)$ um semi-reticulado disjuntivo. Um subconjunto $I \subseteq A$ diz-se um *ideal* se

- $S \subseteq_f I \;\Rightarrow\; \bigvee S \in I$
- $a \in I \;\Rightarrow\; \downarrow\!(a) \subseteq I$

Ou seja, um ideal de A é um conjunto dirigido $I \subseteq A$ tal que $I = \downarrow\!(I)$.

Os ideais de um semi-reticulado são os conjuntos da forma $f^{-1}(0)$ sendo $f : A \to 2$ um homomorfismo de semi-reticulados disjuntivos [7].

Para qualquer $a \in A$, o subconjunto $\downarrow\!(a)$ é o menor ideal de A que contém a e designa-se *ideal principal* gerado por a.

Seja $(A, \leq)$ uma ordem parcial e seja $Idl(A)$ o conjunto dos ideais de A, ordenados por inclusão. $(Idl(A), \subseteq)$ é uma ordem parcial completa algébrica, geralmente denominada *completação por ideais de A.*

O conceito dual ao de ideal é o conceito de filtro. Seja $(A, \leq)$ um semi-reticulado conjuntivo. Um subconjunto $F \subseteq A$ diz-se um *filtro* se

- $S \subseteq_f F \;\Rightarrow\; \bigwedge S \in F$
- $a \in F \;\Rightarrow\; \uparrow(a) \subseteq F$

Os filtros de um semi-reticulado são os conjuntos da forma $f^{-1}(1)$ sendo $f : A \to 2$ um homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos [7].

Para qualquer $a \in A$, o subconjunto $\uparrow(a)$ é o menor filtro de A que contém a e designa-se *filtro principal* gerado por a.

Seja A um reticulado. Um ideal $I \subseteq A$ diz-se *primo* se $1 \notin I$, e $a \wedge b \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$. Dualmente, um filtro $F \subseteq A$ diz-se *primo* quando $0 \notin F$, e $a \vee b \in F \Rightarrow a \in F$ ou $b \in F$. Sendo $a \in A$, dizemos que o elemento a é *primo* se o ideal $\downarrow(a)$ é primo.

Sendo $f : A \to 2$ um homomorfismo de reticulados, I é um ideal primo sse $I = f^{-1}(0)$ e F é um filtro primo sse $F = f^{-1}(1)$.

Verifica-se que: $I \subseteq A$ é um ideal primo sse $A \backslash I$ é um filtro; $F \subseteq A$ é um filtro primo sse $A \backslash F$ é um ideal.

Seja A um local. Um filtro $F \subseteq A$ diz-se *completamente primo* se verifica $\bigvee S \in F \Rightarrow \exists a \in S : \; a \in F$. Todo o filtro completamente primo pode ser identificado com $f^{-1}(1)$, sendo $f : A \to 2$ um homomorfismo de locais.

Dada uma álgebra booleana A, um filtro primo $F \subseteq A$ é um *ultrafiltro* se $\forall a \in A, a \in F$ ou $\overline{a} \in F$.

Os ultrafiltros de A são precisamente os conjuntos $f^{-1}(1)$ em que $f : A \to 2$ é um homomorfismo de álgebras booleanas.

Certos locais têm uma propriedade de separação análoga à usada na definição de ultrafiltros, que é a seguinte: para quaisquer elementos a, b do local tais que $a \not\leq b$, existe um filtro completamente primo F tal que $a \in F$ e $b \notin F$. Os locais nestas circunstâncias dizem-se *espaciais* ou *com pontos suficientes*.

Um local A diz-se *coerente* quando verifica as seguintes condições:

(i) Todo o elemento de A pode ser expresso como uma disjunção de elementos finitos.

(ii) $K(A)$ é um sub-reticulado distributivo de A.

Um local é coerente sse é isomorfico ao local dos ideais de um reticulado distributivo. Todo o local coerente é espacial.

2.3 Espaços Topológicos

Dado um conjunto $|X|$, uma *topologia* $\Omega(X)$ é uma família de subconjuntos de $|X|$ fechada para intersecções finitas e uniões arbitrárias. Aos elementos da topologia chamam-se *abertos*. Note-se que o conjunto $\emptyset$ e $|X|$ são sempre abertos de qualquer topologia sobre $|X|$, uma vez que $\bigcup \emptyset = \emptyset$ e $\bigcap \emptyset = |X|$. Ao par $< |X|, \Omega(X) >$ chama-se *espaço topológico*.

Evidentemente, o conjunto $\mathcal{P}(|X|)$ constitui uma topologia de $|X|$, designada de *topologia discreta* de $|X|$; $\{\emptyset, |X|\}$ forma também uma topologia, chamada a *topologia indiscreta* de $|X|$.

Uma família $\mathcal{B}$ de abertos diz-se uma *base* da topologia, se cada aberto da topologia poder ser representado por uma união de elementos de $\mathcal{B}$.

Uma família $\mathcal{S}$ de abertos diz-se uma *sub-base*, se a família de todas as intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ é uma base do espaço topológico.

Sendo X um espaço topológico, um conjunto $Y \subseteq |X|$ diz-se *fechado* sse o seu complemento $\overline{Y}$ é aberto. Portanto, dualmente ao caso em que temos conjuntos abertos, as disjunções finitas e conjunções arbitrárias de conjuntos fechados são ainda conjuntos fechados.

Sendo $S \subseteq |X|$, chamamos *fecho* de S (e escrevemos $\mathrm{Cl}(S)$) ao menor conjunto fechado que contém S; ou de outro modo, $\mathrm{Cl}(S)$ corresponde à intersecção de todos os fechados de X que contêm S. Um subconjunto S de $|X|$ diz-se *denso* se $\mathrm{Cl}(S) = |X|$.

Um conjunto $Y \subseteq |X|$ pode ser simultaneamente aberto e fechado, e nesse caso diz-se que Y é um *clopen* (da terminologia inglesa).

Um fechado F diz-se *irredutível* se sempre que existirem fechados G_i $(1 \leq i \leq n)$ tal que $F \subseteq \bigcup_i G_i$ então $F \subseteq G_i$, para algum G_i.

Seja X um espaço topológico. Um conjunto $S \subseteq |X|$ é uma *vizinhança* de $x \in |X|$ se existir um aberto O tal que $x \in O$ e $O \subseteq S$.

Seja S uma colecção de subconjuntos de um conjunto X e $A \subseteq X$. Diz-se que S é uma *cobertura de* A se $A \subseteq \bigcup S$. Neste caso, uma *subcobertura de* S é qualquer subconjunto de S que é ainda uma cobertura de A. No caso de X ser um espaço topológico, diz-se que S é uma *cobertura de abertos* de um conjunto $A \subseteq |X|$ se S é uma cobertura e todos os elementos de S são abertos.

Um conjunto $C \subseteq |X|$ diz-se *compacto* quando toda a cobertura de abertos de C tem uma subcobertura finita; ou seja, dado $S \subseteq \Omega(X)$,

$$C \subseteq \bigcup S \quad \Rightarrow \quad \exists S_o \subseteq_f S : \; C \subseteq \bigcup S_o$$

O conjunto $\Omega(X)$ dos abertos de uma topologia com a ordem de inclusão tem a estrutura de um local, uma vez que é fechado para intersecções finitas, reuniões arbitrárias e satisfaz a distributividade infinita $O \cap (\bigcup_i O_i) = \bigcup_i (O \cap O_i)$.

Vejamos agora as condições de separação que caracterizam o grau com que uma topologia consegue distinguir pontos.

Seja X o espaço topológico $< |X|, \Omega(X) >$. Diz-se que o espaço topológico X é *Hausdorff* ou T_2 se para cada par de pontos $x \neq y$, existem dois abertos disjuntos que contêm, respectivamente, x e y. Um espaço topológico diz-se T_1 se para cada par de pontos $x \neq y$, existe um aberto que contém x e não contém y. Um espaço topológico é T_0 se para cada par de pontos distintos, existe um aberto que contém um dos pontos mas não os dois. Evidentemente, $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

À noção de separação está ligada uma relação de especialização que a topologia $\Omega(X)$ gera em $|X|$, e que se define do seguinte modo: sendo $x, y \in |X|$,

$$x \preceq y \qquad sse \qquad \forall O \in \Omega(X), \quad x \in O \Rightarrow y \in O$$

Esta relação é designada por *pré-ordem de especialização* em X. $x \preceq y$ pode ser lido por "x é *menos específico* que y".

Dado um espaço topológico $X \doteq < |X|, \Omega(X) >$ verificam-se as seguintes propriedades [7]:

- O espaço topológico X é T_0 sse a pré-ordem de especialização em X é uma ordem parcial.
- O espaço topológico X é T_1 sse a pré-ordem de especialização em X é a identidade.

Dados dois espaços topológicos X e Y com o mesmo conjunto portador $|X| = |Y|$, se tivermos $\Omega(X) \subseteq \Omega(Y) \subseteq \mathcal{P}(|X|)$ (i.e., cada aberto em X é também um aberto em Y) então diz-se que o espaço topológico X é *mais grosseiro* do que Y ou que Y é *mais fino* do que X.

Seja $(D, \leq)$ um domínio indutivo. A *topologia de Scott* é a topologia constituida por conjuntos $O \subseteq D$ tais que

(i) $x \in O \quad \Rightarrow \quad \uparrow(x) \subseteq O$

(ii) Para todo o conjunto dirigido $S \subseteq D, \qquad \bigvee S \in O \quad \Rightarrow \quad S \cap O \neq \emptyset$

A família de conjuntos $\uparrow(x)$, com $x \in K(D)$, constitui uma base da topologia de Scott sobre D.

Sejam $X \doteq < |X|, \Omega(X) >$ e $Y \doteq < |Y|, \Omega(Y) >$ dois espaços topológicos e $f : |X| \to |Y|$ uma função. Diz-se que f é *contínua* num ponto $x \in |X|$ se qualquer que seja a vizinhança N de $f(x)$ existe um vizinhança M de x tal que $f(M) \subseteq N$. Dizemos simplesmente que f é *contínua* se f for contínua em todos os pontos de X.

Equivalentemente, f é uma *função contínua* nos espaços topológicos X para Y, se para qualquer aberto $O \in \Omega(Y)$, $f^{-1}(O)$ é um aberto de $\Omega(X)$.

Sendo $f : |X| \to |Y|$ uma função contínua, f^{-1} pode ser vista como uma função de $\Omega(Y)$ para $\Omega(X)$, $f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ que preserva intersecções finitas e reuniões arbitrárias, sendo portanto um homomorfismo de locais.

2.4 Categorias - Alguns conceitos

Nesta secção serão apenas apresentados alguns dos conceitos fundamentais da teoria das categorias. Muitos conceitos e resultados importantes ficarão por expor, mas poderão ser encontrados em [11, 10, 13].

Definição 2.1 Uma *categoria* $\mathbf{C}$ é uma entidade que se caracteriza por:

(i) Uma classe de *objectos* (normalmente representados por letras maiúsculas A, B, C, ...).

(ii) Uma classe de *morfismos* (normalmente representados por letras minúsculas f, g, h, ...). Cada morfismo tem associado um *domínio* e um *codomínio* que são objectos de $\mathbf{C}$. Para exprimir que "f é um morfismo de domínio A e codomínio B" escreve-se

$$f : A \longrightarrow B \qquad \text{ou} \qquad A \xrightarrow{f} B$$

(iii) Uma *regra de composição* que toma dois morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ e constrói o morfismo $g \circ f : A \to C$ tal que

- A composição de morfismos é associativa; isto é, para quaisquer morfismos $f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
- Para cada objecto A existe um *morfismo identidade* $id_A : A \to A$ que é tal que para quaisquer $f : A \to B$ e $g : C \to A$ se verifica
$$f \circ id_A = f \quad \text{e} \quad id_A \circ g = g$$

□

Os exemplos mais vulgares de categorias são as chamadas *categorias concretas* em que os objectos são conjuntos com uma dada estrutura e os morfismos são funções que preservam a estrutura. Exemplos de tais categorias são:

Set cujos objectos são os conjuntos e os morfismos funções totais.

PoSet cujos objectos são conjuntos parcialmente ordenados e os morfismos são homomorfismos de conjuntos parcialmente ordenados.

SLat cujos objectos são semi-reticulados e os morfismos são homomorfismos de semi-reticulados.

Lat cujos objectos são reticulados e os morfismos são homomorfismos de reticulados.

DLat cujos objectos são reticulados distributivos e os morfismos são homomorfismos de reticulados.

Bool cujos objectos são álgebras booleanas e os morfismos são homomorfismos de álgebras booleanas.

Existe uma categoria cujos objectos são categorias e cujos morfismos preservam a estrutura entre categorias. A estes morfismos chamam-se functores.

Definição 2.2 Sejam **C** e **D** categorias. Um *functor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ é uma transformação que converte cada objecto A de **C** num objecto $F(A)$ de **D** e converte cada morfismo $f : A \to B$ de **C** num morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ de **D**, tal que

(i) $F(id_A) = id_{F(A)}$, para todo o objecto A em **C**

(ii) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, sempre que $g \circ f$ esteja definido.

□

Alguns exemplos:

- Para toda a categoria **C** existe o *functor identidade* $I_{\mathbf{C}}$ que transforma os objectos e os morfismos de **C** neles próprios.

- Uma classe importante de functores são os chamados *functores esquecimento* (que normalmente representamos por $|.|$) que aplicados a uma categoria concreta fazem "esquecer" a totalidade ou parte da estrutura dos objectos.

Tendo definido funções de uma categoria para outra – functores – continuaremos a definir transformações que preservam a estrutura, agora entre dois functores.

Definição 2.3 Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e sejam F e G functores de $\mathbf{C}$ para $\mathbf{D}$. Uma *transformação natural* η de F para G, que se escreve $\eta : F \dot{\rightarrow} G$, é uma função que associa a cada objecto A em $\mathbf{C}$ um morfismo $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ em $\mathbf{D}$ tal que para todo o morfismo $f : A \rightarrow B$ em $\mathbf{C}$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

□

Definição 2.4 Uma *adjunção* entre as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ caracteriza-se por:

- um functor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$;
- um functor $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$;
- uma transformação natural $\eta : I_{\mathbf{C}} \dot{\rightarrow} (G \circ F)$;
- uma transformação natural $\varepsilon : (F \circ G) \dot{\rightarrow} I_{\mathbf{D}}$;

tal que

> Para cada objecto X em $\mathbf{C}$ e morfismo $f : X \rightarrow G(Y)$ em $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $\overline{f} : F(X) \rightarrow Y$ em $\mathbf{D}$, tal que o seguinte diagrama comuta
>
> $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(\overline{f})"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$
>
> Para cada objecto Y em $\mathbf{D}$ e morfismo $g : F(X) \rightarrow Y$ em $\mathbf{D}$, existe um único morfismo $\overline{g} : X \rightarrow G(Y)$ em $\mathbf{C}$, tal que o seguinte diagrama comuta
>
> $$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[d, "F(\overline{g})"'] \arrow[dr, "g"] & \\ F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Nestas condições dizemos que:

- (F, G) é um par de *functores adjuntos.*
- F é o *adjunto à esquerda* de G (e escreve-se, $F \dashv G$).
- G é o *adjunto à direita* de F (e escreve-se, $G \vdash F$).

A transformação natural η é chamada a *unidade* da adjunção, e ε a *co-unidade* da adjunção.
□

A existência de uma unidade de adjunção, implica a existência de uma co-unidade e vice-versa. Portanto, basta encontrar uma unidade ou uma co-unidade para estabelecer uma adjunção entre dois functores.

A adjunção ocorre quando existe uma correspondência exacta entre os morfismos de $F(X)$ para Y e os morfismos de X para $G(Y)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d] & F(X) \arrow[d] \\ G(Y) & Y \arrow[l, "G"'] \end{tikzcd}$$

Esta bijecção é muitas vezes representada, esquematicamente, por

$$\frac{X \to G(Y)}{F(X) \to Y}$$

2.5 Dualidade de Stone

Nesta secção vamos analisar os espaços topológicos em termos do conjunto dos seus abertos [7, 1].

Se X é um espaço topológico, o conjunto $\Omega(X)$ dos abertos de X (com a inclusão de conjuntos como relação de ordem) é um reticulado completo que satisfaz a *lei de distributividade infinita*: sendo $a \in \Omega(X)$ e $S \subseteq \Omega(X)$,

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s \mid s \in S\}$$

Sendo X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função qualquer de X para Y, sabe-se que $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ é um homomorfismo de álgebras booleanas completas; se a função f for contínua, então f^{-1} restrita a $\Omega(Y) \to \Omega(X)$ preserva conjunções finitas e disjunções arbitrárias. Isto motiva as seguintes definições:

- A categoria **Frm** de *frames* é a categoria cujos objectos são reticulados completos que satisfazem a lei da distributividade infinita, e cujos morfismos são funções que preservam conjunções finitas e disjunções arbitrárias.
- A categoria **Loc** de *locais* é a categoria dual da categoria **Frm**. Os morfismos de **Loc** designam-se *funções contínuas.*
  Ω é o functor **Top** $\to$ **Loc** que transforma um espaço topológico X no local $\Omega(X)$ dos seus abertos, e uma função contínua $f : X \to Y$ na função $f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$.

Portanto, “frame” e “local” são termos sinónimos quando nos estamos a referir apenas à estrutura algébrica dos objectos destas categorias, independentemente do contexto categorial aonde eles possam vir a estar inseridos. No entanto, nestas circunstâncias, o termo “local” será preferido ao longo deste trabalho.

Note-se que **Frm** é uma categoria concreta cujos objectos são conjuntos com uma dada estrutura algébrica, e cujos morfismos são funções que preservam essa estrutura e, consequentemente, mais fácil de manipular. Daí que muitas vezes se estude **Loc** *via* **Frm**. Mas é a topologia **Loc** que se coloca em alternativa à categoria **Top**, e que será portanto o principal objecto de estudo.

Notação: Dado um morfismo $f : A \to B$ em **Loc**, denota-se por f^* o morfismo correspondente $B \to A$ em **Frm**.

Dado um local, poder-se-á encontrar um espaço topológico que “melhor se aproxime” dele ?

Dado um espaço topológico X, podemos identificar os pontos do espaço X com as funções contínuas $1 \to X$, onde 1 denota o espaço constituído por um único ponto.

É portanto razoável definir um *ponto* de um local A como sendo uma função contínua $2 \to A$; ou seja, um morfismo de frames $p : A \to 2$. Qualquer morfismo deste tipo é completamente determinado pelo conjunto $p^{-1}(1)$, que constituí um filtro completamente primo de A, ou por $p^{-1}(0)$ que constituí um ideal principal primo. Portanto, os pontos de A correspondem (bijectivamente) aos elementos primos de A, ou seja, elementos que geram ideais principais primos.

O conjunto dos pontos de um local A, denota-se por $pt(A)$.

Sendo $a \in A$ define-se $\varepsilon_A^*(a)$ como sendo o conjunto de pontos $p : A \to 2$ tal que $p(a) = 1$. $\varepsilon_A^* : A \to \mathcal{P}(pt(A))$ é um homomorfismo de frames. A imagem de ε_A^*, $\varepsilon_A^*(A)$, é uma topologia sobre $pt(A)$.

Daqui para a frente vamos considerar $pt(A)$ como o espaço topológico, com a topologia dada pela imagem de ε_A^*. Podemos ver então ε_A como uma função contínua $\Omega(pt(A)) \to A$ em **Loc**. Isto permite definir a transformação natural $\varepsilon : (\Omega \circ pt) \dot{\to} I_{\mathbf{Loc}}$ que associa a cada local A o morfismo ε_A que é tal que, sendo $a \in A$, $\varepsilon_A^*(a) = \{p : A \to 2 \mid p(a) = 1\}$. pt define um functor $\mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$.

O functor $pt : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$ é o adjunto à direita de $\Omega : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$ e $\varepsilon : (\Omega \circ pt) \dot{\to} I_{\mathbf{Loc}}$ é a co-unidade dessa adjunção.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega(X) \arrow[d, "\Omega(\overline{g})"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\Omega(pt(A)) \arrow[r, "\varepsilon_A"'] & A
\end{tikzcd}
$$

Em geral, a função $\varepsilon_A^* : A \to \Omega(pt(A))$ não é um isomorfismo de frames. Para o ser, a frame A terá de satisfazer a seguinte condição: $\forall a, b \in A$, $(a \not\leq b \Rightarrow \exists p \in pt(A) : p(a) = 1$ e $p(b) = 0)$ ou seja, A deverá ser um local espacial (ou com pontos suficientes). Um local A é espacial quando $pt(A)$ é tal que $A \cong \Omega(pt(A))$.

É claro que sendo X um espaço topológico, $\Omega(X)$ é um local espacial.

Sendo X um espaço topológico, como poderemos compará-lo com $pt(\Omega(X))$?

Os pontos de $\Omega(X)$ correspondem aos seus elementos primos. Sabe-se que o complemento de tais elementos são fechados irredutíveis. Sabe-se também que para qualquer $x \in |X|$ o fecho de $\{x\}$ é irredutível. Isto define uma função $\eta_X : X \to pt(\Omega(X))$.

A família de funções η_X permite definir a transformação natural $\eta : I_{\mathbf{Top}} \dot{\to} (pt \circ \Omega)$ que é a unidade da adjunção $pt \vdash \Omega$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & pt(\Omega(X)) \arrow[d, "pt(\overline{f})"] \\ & pt(A) \end{tikzcd}$$

Quando η_X é uma bijecção diz-se que o espaço X é *sóbrio*. Ou seja, X é sóbrio quando todo o fechado irredutível de X for o fecho dos subconjuntos singulares de $|X|$.

Um espaço topológico X é sóbrio quando $\Omega(X)$ é tal que $X \cong pt(\Omega(X))$.

Alguns resultados importantes [7]:

- Um espaço X é T_0 sse $\eta_X : X \to pt(\Omega(X))$ é injectivo.
- Todo o espaço sóbrio é T_0.
- Todo o espaço T_2 é sóbrio.
- Para todo o local A, o espaço $pt(A)$ é sóbrio.

Definem-se mais duas categorias:

Sob $\subseteq$ **Top** a subcategoria dos espaços sóbrios.

SLoc $\subseteq$ **Loc** a subcategoria dos locais espaciais.

A adjunção existente entre os functores $\Omega : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$ e $pt : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$ dá origem a uma equivalência entre as categorias **Sob** e **SLoc**.

- A inclusão $\mathbf{Sob} \hookrightarrow \mathbf{Top}$ tem por adjunto à esquerda o functor $pt \circ \Omega$.
- A inclusão $\mathbf{SLoc} \hookrightarrow \mathbf{Loc}$ tem por adjunto à direita o functor $\Omega \circ pt$.

Sejam A e B dois locais coerentes. Diz-se que uma função contínua $f : B \to A$ é *coerente* se a imagem dos elementos finitos de A por f^* são elementos finitos de B; ou seja, $f^*(K(A)) \subseteq K(B)$.

Denota-se por **CohLoc** a categoria dos locais coerentes cujos morfismos são funções contínuas coerentes. A categoria **DLat** é a categoria dual de **CohLoc**.

Seja X um espaço topológico. O local $\Omega(X)$ é coerente sse a família $K(\Omega(X))$ dos abertos compactos de X é fechada para intersecções finitas e constituí uma base da topologia de X.

Diz-se que um espaço topológico X é *coerente* se é sóbrio e $\Omega(X)$ é um local coerente.

CohTop é a categoria dos espaços topológicos coerentes e cujos morfismos são funções contínuas coerentes. A categoria **DLat** é dual à categoria **CohTop**.

Podem-se definir os functores $\Omega : \mathbf{CohTop} \to \mathbf{CohLoc}$ e $pt : \mathbf{CohLoc} \to \mathbf{CohTop}$. Para qualquer local coerente A

$$A \cong \Omega(pt(A))$$

e para todo o espaço topológico coerente X

$$X \cong pt(\Omega(X))$$

Este isomorfismo entre locais coerentes e espaços topológicos coerentes também se estende aos morfismos das duas categorias. Verifica-se assim o seguinte isomorfismo de categorias

$$\mathbf{CohTop} \simeq \mathbf{CohLoc} \simeq \mathbf{DLat}^{op}$$

Um espaço topológico coerente e T_2 designa-se por *espaço de Stone*. Denota-se por **Stone** a categoria cujos objectos são espaços de Stone e cujos morfismos são funções contínuas.

Dado um reticulado B, os elementos primos de $Idl(B)$ são precisamente os ideais primos de B.

O functor esquecimento de **Frm** para **DLat** tem como adjunto à esquerda o functor Idl que pega num reticulado distributivo e dá a sua completação por ideais.

Dado um reticulado distributivo A, define-se $Spec(A)$ como sendo o conjunto dos filtros primos de A (isto é, conjuntos da forma $f^{-1}(1)$, sendo $f : A \to 2$ um homomorfismo de reticulados) com a topologia gerada por

$$U_a \equiv \{f^{-1}(1) \in Spec(A) \mid a \in f^{-1}(1)\} \quad , \text{ com } a \in A$$

verifica-se que

$$Spec(A) \cong pt(Idl(A))$$

Seja A um reticulado distributivo. $Spec(A)$ é T_2 sse A é uma álgebra booleana.

A categoria das algebras booleanas **Bool** é dual da categoria, **Stone**, dos espaços de Stone

$$\mathbf{Stone} \simeq \mathbf{Bool}^{op}$$

Verifica-se ainda que [1]:

- O functor esquecimento da categoria dos reticulados distributivos para a categoria dos semi-reticulados conjuntivos **MSL** tem um adjunto à esquerda L, em que $L(A) = \{\downarrow(X) \mid X \in \mathcal{P}_f(A)\}$, ordenada por inclusão.
- Para qualquer semi-reticulado conjuntivo A, define-se $Filt(A)$ como sendo o conjunto de todos os filtros de A, com a topologia definida exactamente como para $Spec(A)$. Verifica-se então que

$$Filt(A) \cong Spec(L(A)) \cong pt(Idl(L(A)))$$

- Verifica-se que

$$\mathbf{AlgLat} \simeq \mathbf{MSL}^{op}$$

em que **AlgLat** é a subcategoria cheia de **CohTop** dos reticulados algébricos com a topologia de Scott.

3 Agentes

Comunicação e concorrência são noções essenciais à compreensão de sistemas complexos que evoluem ao longo do tempo. Um sistema complexo pode ser entendido como um conjunto estruturado de componentes mais simples que podem evoluir concorrentemente ou independentemente umas das outras, mas que cooperam para um objectivo comum. Subjacente a esta noção está o princípio de que as componentes em que um sistema pode ser decomposto têm um elevado grau de independência mútua e têm uma identidade que persiste ao longo do tempo. A estes componentes daremos o nome de *agentes*. O modo como um sistema é decomposto em agentes depende do nosso interesse e do nível de abstracção que queremos alcançar. Assim, um agente que para algum propósito tenha sido considerado atómico, para outro pode ser decomposto em subcomponentes que interactuam. Um agente representa, assim, a unidade básica de construção de um sistema. Aquilo que caracteriza um agente, e que o distingue dos restantes, é o facto de ele ter um dado *comportamento*. Esse comportamento é, em parte, caracterizado pelos seus *eventos*.

Eventos são entidades atómicas que ocorrem num dado instante. O comportamento de um agente é determinado pelas possíveis sequências de eventos que podem ocorrer. Isto significa que, para um agente, o tempo pode ser visto como uma entidade discreta, marcada pela ocorrência dos seus eventos atómicos.

Uma característica muito importante dos agentes é o facto deles poderem interactuar uns com os outros através da ocorrência de eventos partilhados. A comunicação entre dois agentes é estabelecida pela ocorrência de um mesmo evento, simultaneamente, em ambos os agentes. A esta partilha de eventos chama-se *sincronismo*.

O próprio sistema deve ser encarado como um agente cujo comportamento é definível em termos do comportamento dos agentes que o compõem, e que, por sua vez, poderá ser um componente de um sistema maior.

A sequência de eventos que caracteriza um agente no contexto de um determinado sistema chama-se *ciclo de vida* do agente nesse sistema. Convém notar que um agente pode ter ciclos de vida distintos, conforme o contexto onde está inserido. Portanto, um agente tem associado o conjunto de todas as sequências de eventos que têm possibilidade de serem o seu ciclo de vida. A essas sequências de eventos chamam-se *traços*. Ao conjunto de traços que está associado a um agente chamamos *comportamento* do agente. Repare-se que os eventos de um agente correspondem a tarefas potenciais que podem ou não ser executadas. Os traços representam as potenciais sequências de eventos do agente. De entre todos os traços de um agente, há apenas um traço particular que corresponde à sequência de eventos que realmente ocorrem dentro de um dado sistema. Esse traço é o ciclo de vida do agente dentro desse sistema. O comportamento de um agente, sendo o conjunto de todos os seus traços, representa todo o possível “funcionamento” do agente.

Ao longo deste trabalho iremos desenvolver uma metodologia de especificação orientada ao comportamento que terá como unidade básica de especificação *o agente*.

Neste capítulo, vamos apresentar um formalismo que nos permite descrever e raciocinar acerca do comportamento de sistemas concorrentes. Através da lógica podemos descrever sistemas de raciocínio sobre determinado domínio. O nosso domínio de estudo será o comportamento de agentes, pelo que não é de estranhar que, formalmente, um agente venha a ser encarado como um sistema lógico. Vejamos, antes de mais, como podemos descrever genericamente um sistema lógico.

3.1 Sistemas Formais

Um *sistema formal* (ou *sistema lógico*) pode ser usado para descrever sistemas de raciocínio acerca de um dado domínio ou de determinada entidade.

Para podermos descrever as características ou propriedades das entidades, necessitamos de ter uma linguagem que, por um lado, seja suficientemente rica para poder expressar todas as características que queremos capturar das entidades e que, por outro lado, não seja ambígua e possa ser formalmente descrita de um modo simples.

Apoiado na linguagem, é normal que exista um sistema de inferência que permite deduzir novas características das entidades que estamos a analisar, com base noutras características conhecidas à partida. Esses sistemas de inferência são normalmente descritos por um conjunto de regras de inferência.

Assim, genericamente podemos dizer que um *sistema formal* é constituído por:

- Uma *linguagem formal*, definida à custa de um alfabeto de símbolos e de um conjunto de regras sintácticas para a formação das frases da linguagem, às quais chamamos *asserções*.

- Um conjunto de *regras de inferência*, que permitem obter uma asserção como sendo consequência de um conjunto de asserções.

Podemos então caracterizar um sistema formal através de seis entidades

$$< \Omega, \Sigma_T, \mathcal{V}, \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$$

em que $\Omega, \Sigma_T, \Sigma, \mathcal{V}, \mathcal{C}$ caracterizam a linguagem formal e $\vdash$ caracteriza a relação de consequência gerada por um conjunto de regras de inferência.

As asserções da linguagem não são mais do que casos particulares de expressões-λ com tipos. Assim, temos:

- Um conjunto de *espécies* Ω.

- Uma assinatura, Σ_T, constituída por operadores

$$f : \omega \to s \quad , \quad \text{com } \omega \in \Omega^* \ , \ s \in \Omega$$

  A esta assinatura, Σ_T, chamaremos, *assinatura de termos*.

- Uma família de conjuntos de *variáveis* $\mathcal{V} \doteq \{\mathcal{V}_s\}_{s \in \Omega}$, um para cada espécie.

- Uma assinatura Σ de *asserções primitivas*

$$p : \omega \quad , \quad \text{com} \ \ \omega \in \Omega^*$$

- Uma família de conjuntos de *conectivas* $\mathcal{C} \doteq \{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$, $I \subseteq I\!N$, de aridade i.

- Uma *relação de consequência*, $\vdash$, gerada pelas regras de inferência e que em seguida se apresentará em detalhe.

As entidades $\Omega, \Sigma_T, \mathcal{V}, \Sigma$ e $\mathcal{C}$, determinam completamente o conjunto de asserções da linguagem através das seguintes regras de geração:

- $< \Omega, \Sigma_T, \mathcal{V} >$, juntamente com as regras usuais do λ-calculus com tipos, gera um conjunto de *termos de base*.

- Se $p : s_1 s_2 ... s_n$ é uma asserção primitiva de Σ, com $s_1, s_2, ..., s_n \in \Omega$, e se $t_1, t_2, ..., t_n$ são termos de espécie $s_1, s_2, ..., s_n$, respectivamente, então $p(t_1, t_2, ..., t_n)$ é uma asserção (atómica, ou seja, não susceptível de ser decomposta).

- Se $p_1, p_2, ..., p_n$ são asserções e $\diamond \in \mathcal{C}_n$ é uma conectiva n-ária, então $\diamond(p_1, p_2, ..., p_n)$ é uma asserção.

Sendo $\diamond \in \mathcal{C}_1$ e $\square \in \mathcal{C}_2$ (isto é, $\diamond$ é uma conectiva unária e $\square$ uma conectiva binária) e p e q asserções, é normal escrever $\diamond(p)$ e $\square(p, q)$ na forma $\diamond p$ e $p \square q$, respectivamente.
Denotaremos por F, o conjunto de todas as asserções do sistema.

Para além da linguagem formal que acabamos de descrever, um aspecto essencial de um sistema lógico são, como já vimos, as regras de inferência desse sistema, pois é o mecanismo que nos leva a encarar uma lógica, como um sistema de raciocínio. Essas regras de inferência vão ser responsáveis pela geração da relação de consequência $\vdash$, que é a relação que impõe semântica na linguagem.
Para este trabalho estamos interessados em sistemas de raciocínio monotónico e como tal, a definição de relação de consequência é dada da maneira que se segue. Usaremos as letras $\Gamma, \Delta, \Theta, ...$, para representar conjuntos de asserções e as letras $A, B, C, ...$ para representar asserções.

Definição 3.1
Uma **relação de consequência** *em F, $\vdash$, é uma relação binária entre o conjunto $\mathcal{P}(F)$ das partes de F e o conjunto F ($\vdash \subseteq \mathcal{P}(F) \times F$) que satisfaz as seguintes propriedades: sejam $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(F)$ e $A, C \in F$,*

(i) se $A \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash A$ *(inclusão)*

(ii) se $\Gamma \vdash A$ então $\Gamma, \Delta \vdash A$ *(monotonia)*

(iii) se $\Gamma \vdash C$ e $\Delta, C \vdash A$ então $\Gamma, \Delta \vdash A$ *(corte)*

$\square$

$\Gamma \vdash A$ deve ser lido: "A é uma consequência de Γ" ou "Γ infere A". A vírgula representa a união de conjuntos. Assim, Γ, Δ significa $\Gamma \cup \Delta$ e Δ, C significa $\Delta \cup \{C\}$.

É frequente representar as propriedades que caracterizam uma relação de consequência através das seguintes *regras de inferência*:

Inclusão: $\overline{\Gamma \vdash A}$, *para todo* $A \in \Gamma$

Monotonia: $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash A}$

Corte: $\dfrac{\Gamma \vdash C \quad \Delta, C \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash A}$

A barra horizontal lê-se "se ... estão ...". Os elementos por cima da barra são chamados *premissas* e ao elemento que está por baixo da barra chama-se *conclusão*. Vejamos o significado destas regras de inferência:

- A inclusão diz-nos que se uma asserção A é tomada como pressuposto então ela é uma consequência válida.
- A monotonia diz-nos que, sendo A uma consequência de Γ, se acrescentarmos mais pressupostos a Γ continuamos a poder concluir A.
- O corte diz-nos que se a asserção A é uma consequência do conjunto de pressupostos Δ e do pressuposto C, então A pode ser inferível a partir de Δ e de um conjunto de pressupostos Γ que infiram C.

Portanto, uma relação de consequência tem de verificar as propriedades de inclusão, monotonia e corte. No entanto, cada relação de consequência, em particular, pode verificar outras propriedades, para além das definidas acima, que caracterizam essa relação e que a distingue das restantes relações de consequência que é possível definir sobre a linguagem. Essas propriedades podem ser dadas por regras de inferência adicionais.

É normal que dentro do problema que estamos a descrever utilizando a linguagem lógica, existam consequências $\Gamma \vdash A$ que desejamos que sejam sempre válidas.

Pode acontecer que a validade de tais consequências venha directamente do significado do próprio problema, não existindo na definição da relação de consequência nada que force que tal ocorra.

Se pela análise do problema que estamos a descrever chegarmos à conclusão que existe um conjunto de consequências $\{\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n\}$ que são sempre válidas, as provas que possamos construir para raciocinar acerca do problema descrito, têm de ser condicionadas por este facto. Às consequências $\Gamma_i \vdash A_i$ nestas circunstâncias chamaremos *axiomas* e a sua inserção no sistema de regras de inferência faz-se introduzindo regras que traduzam esse facto. Assim, cada axioma dará origem a um regra sem premissas e com o axioma como conclusão. Ou seja, para cada axioma $\Gamma_i \vdash A_i$ temos a regra de inferência

$$\overline{\Gamma_i \vdash A_i}$$

Um sistema lógico, como sistema de raciocínio que é, permite deduzir as consequências válidas (elementos da relação de consequência) partindo dos axiomas e regras de inferência. Para vermos como pode ser feita a construção de deduções e provas vamos, antes de mais, dar a definição de árvore de prova e árvore de dedução.

Cada regra de inferência pode ser vista como uma árvore cujos nodos são as consequências que estão envolvidas na regra. Assim, a regra de inclusão é representada por uma árvore com um só nodo, a regra de monotonia por uma árvore com dois nodos e a regra de corte por uma árvore com três nodos. A raiz da árvore é a conclusão da regra e as folhas são as premissas, pelo que representamos a raiz da árvore em baixo e as folhas em cima. Uma consequência também pode ser vista como uma árvore de um só nodo. Vendo as regras de inferência como árvores, o processo de dedução, usando as regras de inferência, pode ser encarado como a construção de árvores.

Definição 3.2
O conjunto de **árvores de prova**, para a relação de consequência em F, *é o menor conjunto de árvores que:*

(1) Contém todas as árvores de um só nodo que são axiomas.

(2) Para quaisquer n árvores ($n \in I\!N$) $T_1, \ldots, T_n$ *que tenham como raiz* $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ *respectivamente, e para toda a instância de uma regra de inferência que tenha* $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ *como premissas e conclusão* $\Gamma \vdash A$, *a árvore* T *de raiz* $\Gamma \vdash A$ *e com sub-árvores* $T_1, \ldots, T_n$, *é uma árvore de prova.*

□

Definição 3.3
O conjunto de **árvores de dedução**, para a relação de consequência em F , *é o menor conjunto de árvores que:*

(1) Contém todas as árvores de um só nodo.

(2) Para quaisquer n árvores ($n \in I\!N$) $T_1, \ldots, T_n$ *que tenham como raiz* $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ *respectivamente, e para toda a instância de uma regra de inferência que tenha* $\Gamma_1 \vdash A_1, \ldots, \Gamma_n \vdash A_n$ *como premissas e conclusão* $\Gamma \vdash A$, *a árvore* T *de raiz* $\Gamma \vdash A$ *e com sub-árvores* $T_1, \ldots, T_n$, *é uma árvore de prova.*

□

Portanto, numa árvore de prova cada ramo da árvore é sempre terminado por um axioma, ou dito de outro modo, todas as folhas de uma árvore de prova são axiomas. Numa árvore de dedução, as folhas da árvore podem não ser axiomas, sendo apenas tomadas como premissas.

Definição 3.4
Uma consequência $\Gamma \vdash A$ *diz-se* **demonstrável**, na relação de consequência em F, *se existir uma árvore de prova, para a relação de consequência em* F, *que tenha a consequência* $\Gamma \vdash A$ *como conclusão.*
Uma consequência $\Gamma \vdash A$ *demonstrável denota-se por* $\overline{\Gamma \vdash A}$.
□

Lema 3.1
Toda a consequência demonstrável, numa relação de consequência em F, *é um elemento dessa mesma relação.*

PROVA: Trivial; uma vez que a relação de consequência é gerada pelas regras de inferência que são o suporte da construção da árvore de prova.
□

Se repararmos na definição de relação de consequência, podemos ver que nada nos é dito acerca da cardinalidade dos conjuntos de pressupostos dos elementos da relação. Portanto, podemos ter $\Gamma \vdash A$ sendo Γ um conjunto infinito de pressupostos. Uma relação de consequência que consinta conjuntos infinitos de pressupostos não parece muito útil para a construção de provas, uma vez que uma prova deve ser algo finito.

Mas, podemos ter conjuntos infinitos de pressupostos que, mesmo assim, podem ser manipulados (no que se refere à relação de consequência) em termos de conjuntos finitos.

Definição 3.5

Uma relação de consequência $\vdash$*, diz-se* **compacta** *quando* $\Gamma \vdash A$ *se e só se existe um subconjunto finito* Γ_0 *de* Γ *tal que* $\Gamma_0 \vdash A$*; isto é,*

$$\Gamma \vdash A \qquad sse \qquad \exists\, \Gamma_0 \subseteq_f \Gamma \ : \quad \Gamma_0 \vdash A$$

□

Uma vez definida a relação de consequência em F, podemos extendê-la para uma relação binária no conjunto $\mathcal{P}(F)$.

Definição 3.6

Seja $\vdash$ *uma relação de consequência em* F*. Extendemos a relação* $\vdash \subseteq \mathcal{P}(F) \times F$ *para uma relação binária em* $\mathcal{P}(F)$*,* $\vdash \subseteq \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F)$*, do seguinte modo:*
sendo $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(F)$*,*

$$\Gamma \vdash \Delta \qquad sse \qquad \Gamma \vdash A \ \ , \ \ para\ todo \quad A \in \Delta$$

Esta relação chama-se **relação de consequência** *em* $\mathcal{P}(F)$*.*
□

$\Gamma \vdash \Delta$ continua a ler-se: "Γ infere Δ" ou "Δ é consequência de Γ". Pela definição, sabemos que isto acontece se Γ inferir cada uma das asserções de Δ.

É fácil de ver que a consequência $\Gamma \vdash \emptyset$ é sempre válida. Normalmente escrevemos $\Gamma \vdash$ em vez de $\Gamma \vdash \emptyset$.

Com base nas propriedades da relação de consequência em F, vamos agora investigar as propriedades presentes na relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$. Essas propriedades serão apresentadas na forma de regras.

Lema 3.2 (Inclusão)

Sejam $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(F)$*,*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta'} \quad , \quad para\ qualquer \quad \Delta' \subseteq \Delta$$

PROVA: Por definição, $\Gamma \vdash \Delta$ sse $\Gamma \vdash A$, para qualquer $A \in \Delta$. Como $\Delta' \subseteq \Delta$, temos que $\forall A \in \Delta'$, $\Gamma \vdash A$, pelo que $\Gamma \vdash \Delta'$.
□

Lema 3.3 (Reflexividade)
Seja $\Delta \in \mathcal{P}(F)$,

$$\frac{}{\Delta \vdash \Delta}$$

PROVA: Sabemos que $\Delta \vdash \Delta$ sse $\Delta \vdash A$, para todo $A \in \Delta$, o que é sempre verdade pela propriedade de inclusão da relação de consequência em F.
□

Lema 3.4 (Aumentatividade)
Sejam $\Gamma, \Delta, \Delta' \in \mathcal{P}(F)$,

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}$$

PROVA: Por definição, $\Gamma \vdash \Delta, \Delta'$ sse $\Gamma \vdash A$, para todo $A \in \Delta \cup \Delta'$. Como temos $\Gamma \vdash \Delta$ e $\Gamma \vdash \Delta'$ sabe-se que $\forall A \in \Delta, \Gamma \vdash A$ e $\forall A \in \Delta', \Gamma \vdash A$, pelo que a condição é trivialmente satisfeita.
□

Lema 3.5 (Monotonia)
Sejam $\Gamma, \Gamma', \Delta \in \mathcal{P}(F)$,

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$$

PROVA: Por definição, $\Gamma \vdash \Delta$ sse $\Gamma \vdash A$, para todo $A \in \Delta$. Pela monotonia da relação de consequência, se $\Gamma \vdash A$ então $\Gamma, \Gamma' \vdash A$. Pelo que, $\forall A \in \Delta, \quad \Gamma, \Gamma' \vdash A$, e portanto $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta$
□

Dizemos que $\Gamma \vdash \Delta$ é um *axioma*, se para todo $A \in \Delta$, $\Gamma \vdash A$ é um axioma.

Como é de esperar, os conceitos de árvore de prova e árvore de dedução para a relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$ vão ser conceptualmente iguais aos que foram dados para a relação de consequência em F, apenas diferindo no tipo da relação envolvida. Também aqui podemos encarar uma regra de inferência como uma árvore que tem as premissas como folhas e a conclusão como raiz.

Definição 3.7
O conjunto de **árvores de prova**, para a relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$, *é o menor conjunto de árvores que:*

(1) Contém todas as árvores de um só nodo que são axiomas.

(2) Para quaisquer n árvores ($n \in I\!N$) $T_1, \ldots, T_n$ que tenham como raiz $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ respectivamente, e para toda a instância de uma regra de inferência que tenha $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ como premissas e conclusão $\Gamma \vdash \Delta$, a árvore T de raiz $\Gamma \vdash \Delta$ e com sub-árvores $T_1, \ldots, T_n$, é uma árvore de prova.

□

Definição 3.8
O conjunto de **árvores de dedução**, para a relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$, *é o menor conjunto de árvores que:*

(1) *Contém todas as árvores de um só nodo.*

(2) *Para quaisquer n árvores ($n \in \mathbb{N}$) $T_1, \ldots, T_n$ que tenham como raiz $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ respectivamente, e para toda a instância de uma regra de inferência que tenha $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \Delta_n$ como premissas e conclusão $\Gamma \vdash \Delta$, a árvore T de raiz $\Gamma \vdash \Delta$ e com sub-árvores $T_1, \ldots, T_n$, é uma árvore de prova.*

□

Definição 3.9

Uma consequência $\Gamma \vdash \Delta$ diz-se **demonstrável**, na relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$, *se existir uma árvore de prova, para a relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$, que tenha a consequência $\Gamma \vdash \Delta$ como conclusão.*

Uma consequência $\Gamma \vdash \Delta$ demonstrável denota-se por $\overline{\Gamma \vdash \Delta}$.

□

Lema 3.6

Toda a consequência demonstrável, numa relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$, é um elemento dessa mesma relação.

PROVA: Trivial; uma vez que a relação de consequência é gerada pelas regras de inferência que são o suporte da construção da árvore de prova.

□

Lema 3.7 (Corte)

Sendo $C \in F$ e $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \in \mathcal{P}(F)$,

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, C \quad \Gamma', C \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

PROVA: $\Gamma', C \vdash \Delta'$ sse $\Gamma', C \vdash A$, para todo $A \in \Delta'$. Por outro lado, sendo $A \in \Delta'$ a inferência

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, C \qquad \Gamma', C \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, A}$$

é sempre válida como se pode comprovar pela árvore de dedução

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, C}{\Gamma \vdash \Delta}\,(Inc)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\,(Mon) \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, C}{\Gamma \vdash C}\,(Inc) \quad \Gamma', C \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}\,(Corte)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, A}\,(Aum)$$

Como a inferência provada se verifica para um $A \in \Delta'$ arbitrário, por definição acabamos de provar a inferência do lema.

□

Lema 3.8

Sendo $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \in \mathcal{P}(F)$,

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \quad \Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

PROVA: A prova constrói-se facilmente pela seguinte árvore de dedução

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\,(Mon) \quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta'}\,(Mon)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(Aum)$$

□

Lema 3.9 (Super-corte)
Sendo $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \in \mathcal{P}(F)$ *e* Θ *um conjunto finito de asserções, ou seja,* $\Theta \subseteq_f F$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \Theta \quad \Gamma', \Theta \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

PROVA: Vamos provar esta regra por indução no número de asserções de Θ (daí a exigência de Θ ser finito).

Como caso de base temos $\Theta = \emptyset$ que já foi provado no lema anterior. Vejamos agora o passo de indução: vamos provar que sendo esta regra válida para um conjunto com $n-1$ asserções, é válida para conjuntos com n asserções. Sendo Θ um conjunto de n asserções, podemos escrever $\Theta = \Theta \backslash C \cup \{C\}$ com C uma qualquer asserção em Θ.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, \Theta\backslash C}\,(Inc) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \Theta}{\Gamma \vdash \Delta, \Theta\backslash C, C} \quad \dfrac{\Gamma, \Theta \vdash \Delta'}{\Gamma', \Theta\backslash C, C \vdash \Delta'}}{\Gamma, \Gamma', \Theta\backslash C \vdash \Delta, \Theta\backslash C, \Delta'}\,(Corte)}{\Gamma, \Gamma', \Theta\backslash C \vdash \Delta, \Delta'}\,(Inc)}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}\,(*)$$

$(*)$ é válido partindo do princípio que a regra do super-corte é válida para conjuntos com $n-1$ asserções.

A indução permite agora concluir o resultado pretendido.
□

A relação de consequência vista como relação binária entre conjuntos de asserções pode conter elementos que têm conjuntos infinitos de asserções do lado esquerdo e/ou do lado direito da relação. No entanto, as relações de consequência mais interessantes serão aquelas em que mesmo esses elementos com conjuntos infinitos de asserções possam ser manipulados em termos de conjuntos finitos.

Definição 3.10
Dizemos que uma relação de consequência em $\mathcal{P}(F)$ *é* **compacta** *quando*

$$\Gamma \vdash \Delta \qquad sse \qquad \exists\, \Gamma_0 \subseteq_f \Gamma \;\; \forall \Delta_0 \subseteq_f \Delta, \quad \Gamma_0 \vdash \Delta_0$$

□

O interesse especial que temos nas relações de consequência compactas prende-se com o facto de serem estas relações, aquelas que terão potencialidades para poderem, em princípio, ser calculadas através de um processo automático de prova.

3.2 Caracterização dos Agentes

A noção de agente é fundamental na caracterização de sistemas complexos. Como vimos, os agentes evoluem pela ocorrência de eventos que determinam o seu comportamento.

> De que maneira, a ocorrência de um evento se irá reflectir nas propriedades que esse agente exibe ?

A nossa definição de agente será orientada no sentido de tentar responder a esta questão. A caracterização formal de um agente será feita pela definição de uma lógica. Usaremos a lógica para descrever o relacionamento entre propriedades e eventos.

Essencialmente, um agente será visto como uma entidade a que estão associadas propriedades e essas propriedades estão ligadas à noção de evento e à causalidade entre eventos e propriedades.

Na apresentação informal da noção de agente feita até agora, encontramos muitas semelhanças com os conceitos dados por Milner em [12] para o CCS. Tal como no CCS, o agente é visto como a componente elementar de um sistema comunicante que tem uma entidade própria. No entanto, a caracterização dos nossos agentes não será feita em termos de eventos com potencialidade de entrar em sincronismo com outros agentes, mas sim em termos de asserções que têm possibilidade de "ocorrer".

A "ocorrência" de asserções está ligada à observação de propriedades no agente. Informalmente, uma asserção "ocorre" quando "é válida no instante presente".

Ao contrário do CCS, onde os eventos são potenciais e só se tornam efectivos quando sincronizam com outros agentes, nesta abordagem os eventos são vistos como algo que realmente ocorreu. No entanto, não é geralmente possível determinar os eventos que ocorreram a não ser de uma forma indirecta, através de propriedades que se observam no agente; ou seja, pela ocorrência de asserções.

Enquanto o CCS fornece um calculus que permite determinar o conjunto dos traços que representa todas as possíveis evoluções do agente, a abordagem aqui apresentada parte do princípio que existe um ciclo de vida formado por uma sequência de eventos que ocorreram e que justifica as propriedades que são válidas no instante presente, ou seja, as propriedades que ocorrem (usando a nossa terminologia).

Note-se que embora possam existir várias sequências de eventos (traços) que justifiquem a observação de uma dada propriedade no agente, apenas uma dessas sequências de eventos deverá ter, efectivamente, ocorrido.

Pelo exposto é também aparente que, ao contrário do CCS que estuda evoluções de agentes e portanto constrói sequências de eventos fixas no presente e que se estendem para o futuro (eventualmente de modo infinito), o nosso estudo se vai basear em sequências de eventos que se estendem infinitamente *para o passado* (mais propriamente, sequências que evoluem do passado para o presente) já que procuramos no passado justificações para as observações no instante presente.

As características enunciadas para a noção de agente fazem com que vejamos um agente como um conjunto de asserções que expressam as suas propriedades e que uma dada semântica se encarregará de determinar a validade. Portanto, um agente é basicamente um sistema lógico. É, no entanto, um sistema lógico com uma característica especial: as asserções devem reflectir a noção de *causalidade* entre eventos e propriedades.

> Dado um evento a e uma asserção A, será legítimo perguntar em que circunstâncias se pode afirmar que, após a ocorrência do evento a ocorre a asserção A.

Note-se que não estamos a impor condições para que o evento a ocorra; estamos apenas a pôr condições para que, partindo do princípio que ocorreu a, se possa imediatamente a seguir, garantir a validade da asserção A.

É óbvio que podem existir muitas condições que forçam a validade de A imediatamente após a ocorrência do evento a. Existirá no entanto uma condição que é de algum modo miníma: produz a condição suficiente, mas também necessária para o fim em vista. Na nossa lógica de agentes vamos impor que existe uma condição que é a mais fraca de todas. Essa condição será expressa por uma asserção composta da linguagem lógica, envolvendo a asserção A e o evento a. A essa asserção chamaremos *causa essencial de A face ao evento a* e será representada por $a\,A$.

Os eventos serão vistos, na lógica dos agentes, como conectivas unárias que por convenção se escreverão de forma prefixa. Esta é, sem dúvida, uma característica muito importante dos nossos agentes.

Um outro aspecto a referir é que nesta lógica lidamos não só com asserções individuais mas principalmente com conjuntos de asserções. Uma propriedade que se observa num agente pode ser constituída por várias asserções, cada uma delas representando uma faceta particular da propriedade. Portanto, as *fórmulas* da nossa lógica não serão necessariamente asserções, mas sim conjuntos de asserções.

É agora natural falar em *causa essencial para uma propriedade* Δ (formada pelo conjunto $\{A_1, A_2, \ldots\}$ de asserções) *face ao evento a*. A causalidade vai impor que esta causa seja construída à custa das causas de cada uma das asserções. Isto, porque não há nada no facto de as asserções aparecerem num grupo que altere as condições que se têm de verificar para que cada uma delas ocorra.

É portanto natural definir

$$\begin{aligned} a\,\emptyset &\doteq \emptyset \\ a\{A_1, A_2, \ldots\} &\doteq \{a\,A_1, a\,A_2, \ldots\} \end{aligned}$$

Uma vez apresentada a linguagem lógica dos agentes, surge a necessidade de impor semântica nesta linguagem. Os agentes são uma classe especial dos sistemas formais que foram apresentados na secção anterior. Assim, sobre a linguagem lógica define-se uma relação de consequência. Como vimos, a linguagem de agentes é constituída por asserções que reflectem a noção de causalidade e tem a particularidade de encarar os eventos como conectivas lógicas. Como é natural, a noção de causa essencial expressa na linguagem dos agentes vai, com certeza, reflectir-se na relação de consequência que dará semântica à sua lógica.

Entrando agora em consideração com a noção de causa essencial, suponhamos que se verifica a consequência $\Gamma \vdash \Delta$. Isto diz-nos que "Γ infere Δ" ou, "Δ é uma consequência de Γ", mas pensando em termos de ocorrência de asserções, podemos interpretar a consequência $\Gamma \vdash \Delta$ como: "ocorrendo Γ também ocorre Δ". Sendo a um evento e por isso uma conectiva da nossa lógica vejamos como podemos relacionar a consequência $\Gamma \vdash \Delta$ com as fórmulas da forma $a\,\Gamma$. Como sabemos, $a\,\Gamma$ significa a causa essencial de Γ face ao evento a, e é tal que quando ocorre e quando a também ocorre, temos a garantia que Γ ocorre; ou seja, no instante imediatamente após a ocorrência do evento a

as asserções de Γ são válidas. Como $\Gamma \vdash \Delta$ diz-nos que ocorrendo Γ também deve ocorrer Δ, será natural que a ocorrência de $a\,\Gamma$ deva ter como consequência a ocorrência de $a\,\Delta$.

Pelo que foi exposto, é de esperar que a relação de consequência que vai caracterizar a lógica dos agentes verifique a seguinte regra:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{a\,\Gamma \vdash a\,\Delta}$$

Esta regra terá o nome de *regra de causa*, uma vez que está directamente ligada à noção de causa essencial.

Portanto, os agentes têm uma linguagem lógica que se caracteriza por formalizar o conceito de evento na noção de conectiva unária e ter frases que traduzem a noção de causa essencial face a um evento, e têm uma relação de consequência que verifica a regra de causa. Por outro lado, estamos normalmente interessados em relações de consequência compactas, pelo que a relação de consequência de um agente deverá também ser compacta.

Uma relação de consequência com estas características terá o nome de *relação de causa*, mas vejamos a sua definição formal.

Definição 3.11

Uma **relação de causa** *(ou uma* **relação de causa suficiente***) definida em conjuntos de asserções (sobre uma linguagem F, com as características da linguagem lógica de agentes) é uma relação de consequência compacta que verifica a regra de causa*

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{a\,\Gamma \vdash a\,\Delta} \quad (Causa)$$

sendo $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(F)$ *e* $a \in \mathcal{C}$.
□

Uma relação de causa (ou causa suficiente) dá origem à leitura "Γ é causa suficiente de Δ" quando se verifica $\Gamma \vdash \Delta$.

Depois de todas estas noções preliminares, vejamos então a definição formal de agente. Os agentes constituem uma classe especial de sistemas formais. A sua linguagem lógica e a sua relação de consequência têm características particulares ligadas com as ideias já expostas.

No que respeita à linguagem, a principal característica é a visão dos eventos como conectivas lógicas unárias e a noção de causa essencial. Portanto, o conjunto $\mathcal{C}$ de conectivas será constituído apenas por conectivas unárias que são os eventos.

A partir de Σ (conjunto das asserções primitivas) e $\mathcal{C}$ geramos as frases da linguagem que podem ser

- asserções primitivas, $A_p \in \Sigma$;
- ou causas essenciais de asserções face a eventos; isto é, asserções da forma $a\,A$, com $a \in \mathcal{C}$ e A uma asserção.

Mais concretamente, toda a asserção é da forma:

$$\alpha\,A_p \qquad , \text{ sendo } \alpha \in \mathcal{C}^* \text{ e } A_p \in \Sigma$$

Claramente, o conjunto F de todas as asserções da linguagem é isomorfo ao conjunto

$$\mathcal{C}^* \times \Sigma$$

As fórmulas da nossa lógica serão, como vimos, conjuntos de asserções geradas por Σ e por $\mathcal{C}$, donde o conjunto das fórmulas do agente, que denotamos por $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$, identifica-se com o conjunto das partes de $\mathcal{C}^* \times \Sigma$

$$\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}} \quad \doteq \quad \mathcal{P}(\mathcal{C}^* \times \Sigma)$$

Será sobre este conjunto que se irá definir a relação de causa que dará semântica à linguagem.

Olhando para a definição genérica de sistema formal que apresentámos na secção anterior, vemos que ele é composto por seis componentes. No entanto, para este estudo sobre agentes iremos, sem perda sensível de generalidade, simplificar esta estrutura. Assim, vamos conservar apenas a assinatura de asserções primitivas, a família de conectivas e a relação de consequência, pois são estas as componentes realmente importantes para o nosso estudo neste trabalho, e esquecer as outras componentes. Por este motivo, as asserções primitivas da linguagem serão 0-árias.

Definição 3.12

Um **agente** *é uma lógica escrita na forma de um triplo*

$$< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$$

em que

Σ *é um conjunto contável de asserções 0-árias, chamadas* asserções primitivas*, eventualmente indexado por uma álgebra de modo a poder incluir parametrização.*

$\mathcal{C}$ *é um conjunto contável de conectivas unárias chamadas* eventos*, também eventualmente indexadas pela mesma álgebra.*

$\vdash$ *é uma* relação de causa *em $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$; ou seja, no conjunto dos conjuntos de asserções geradas por Σ e $\mathcal{C}$.*

□

Através desta técnica de indexação evita-se que seja necessária uma caracterização específica dos tipos de dados (quando eles não são necessários para o problema em questão).

Sendo $\Gamma, \Delta \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$ e $\alpha \in \mathcal{C}^*$, é fácil de ver que uma relação de causa satisfaz sempre a seguinte regra

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\alpha\,\Gamma \vdash \alpha\,\Delta}$$

A prova obtem-se por indução no comprimento de α.

Apesar de uma consequência do tipo $a\,\Gamma \vdash b\,\Delta$ se ler "$a\,\Gamma$ é causa suficiente $b\,\Delta$"e de, portanto, significar que ocorrendo a fórmula $a\,\Gamma$ também ocorre a fórmula $b\,\Delta$, isso não quer dizer que a ocorrência do evento a leve à ocorrência do evento b. O que $a\,\Gamma \vdash b\,\Delta$ nos diz é que a condição mais fraca que é necessário garantir antes da ocorrência do evento a para que as asserções de Γ sejam válidas (ocorram) são suficientes para garantir que após a ocorrência do evento b (caso este ocorra) todas as asserções de Δ são válidas. Ou seja, a causa essencial de Γ face ao evento a é "mais forte" do que a causa essencial de Δ face ao evento b. Note-se, no entanto, que nada força a ocorrência dos eventos a ou b, apenas nos estamos a pronunciar acerca das condições propícias à sua ocorrência.

Quando escrevemos uma consequência $a\,\Gamma \vdash b\,\Delta$, estamos a dizer que a condição expressa pela fórmula $a\,\Gamma$ é suficiente para garantir a validade da causa essencial de Δ face ao evento b. Ou seja, nessa situação *se* ocorrer o evento b, as asserções de Δ são válidas.

Vejamos então, a leitura intuítiva que podemos fazer de alguns tipos de consequências que podem surgir num agente:
sendo $a, b, c \in \mathcal{C}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}^*$ e $\Gamma, \Delta, \Theta \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$,

$\vdash a\,\Delta$ após a ocorrência do evento a as asserções de Δ ocorrem;

$\vdash a\,b\,\Delta$ após a ocorrência do evento a seguido do evento b as asserções de Δ ocorrem;

$\vdash \alpha\,\Delta$ após a ocorrência da sequência de eventos α as asserções de Δ ocorrem;

$\alpha\,\Gamma \vdash \beta\,\Delta$ se após a ocorrência da sequência de eventos α as asserções de Γ ocorrem então, após a sequência de eventos β (caso eles ocorram) as asserções de Δ ocorrem;

$\alpha\,\Gamma, \gamma\,\Theta \vdash \beta\,\Delta$ se após a sequência de eventos α ocorrer Γ e após a sequência de eventos γ ocorrer Θ então, após a sequência de eventos β (caso eles ocorram) Δ ocorre.

Lema 3.10
Seja $<\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ um agente. A relação de causa $\vdash$, satisfaz a seguinte regra:
sendo $\Gamma, \Delta, \Theta \in \mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$ e $a, b \in \mathcal{C}$,

$$\frac{\Gamma \vdash a\,\Theta \quad \Theta \vdash b\,\Delta}{\Gamma \vdash a\,b\,\Delta}$$

PROVA:

$$\frac{\Gamma \vdash a\,\Theta \quad \dfrac{\Theta \vdash b\,\Delta}{a\,\Theta \vdash a\,b\,\Delta}\,(Causa)}{\Gamma \vdash a\,b\,\Delta}\,(Corte)$$

□

O que este lema nos diz é que:

> Se a ocorrência de Γ faz com que após uma eventual ocorrência de a, Θ ocorra, e se a ocorrência de Θ faz com que após uma eventual ocorrência de b, Δ ocorra, então a ocorrência de Γ é suficiente para que após uma eventual ocorrência de a seguida da ocorrência de b, Δ ocorra.

3.3 Um Exemplo

Para consolidar todos estes conceitos, vamos usar esta lógica de agentes para especificar o comportamento de uma componente de software bem conhecida: vamos especificar o comportamento de uma *stack infinita* de números naturais.

Como sabemos, temos de ter um cuidado especial na identificação das asserções primitivas do agente, uma vez que elas são os nossos "pontos de observação", funcionando como "sensores do comportamento". Portanto, elas devem surgir para caracterizar os aspectos do agente que sofrem alterações após a ocorrência dos seus eventos. Aproveitando a ideia de ver as asserções primitivas como "sensores do comportamento" podemos ainda dizer que a ocorrência de uma asserção corresponde, nesta analogia, à activação do "sensor".

Assim, a consequência $\vdash \alpha\ \Delta$ diz-nos que uma eventual ocorrência da sequência de eventos α levaria à imediata activação dos "sensores" de Δ (ou seja, ocorrência das asserções de Δ).

Pensando então numa stack infinita de números naturais, vamos necessitar de ter as seguintes asserções primitivas:

$Empty$	– que ocorre quando a stack está vazia;
Top_x	– que ocorre quando o elemento $x \in I\!N$ está no topo da stack.

Na realidade necessitamos de ter uma família de asserções $\{Top_x\}_{x \in I\!N}$; uma asserção para cada elemento $x \in I\!N$.

Os eventos que podem ocorrer numa stack são:

new	– para criar uma stack nova;
$push_x$	– para colocar o elemento $x \in I\!N$ na stack;
pop	– para retirar um elemento da stack.

Relativamente ao $push_x$ teremos aqui, não um único evento, mas uma família de eventos $\{push_x\}_{x \in I\!N}$; um evento $push_x$ para cada elemento $x \in I\!N$.

Teremos, portanto, conjuntos enumeráveis e infinitos tanto de asserções como de conectivas:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma & \doteq & \{Empty\} \cup \{Top_x\}_{x \in I\!N} \\ \mathcal{C} & \doteq & \{new, pop\} \cup \{push_x\}_{x \in I\!N} \end{array}$$

Adoptamos a notação de começar as asserções por letra maiúscula e os eventos por letra minúscula.

Já definimos Σ e $\mathcal{C}$ para a linguagem lógica da stack; falta-nos agora definir a sua relação de causa $\vdash$, que irá caracterizar o seu comportamento.

A relação de causa de uma stack infinita satisfaz as seguintes famílias enumeráveis de axiomas, aqui já expressas na forma de regras de inferência:

$$\frac{}{\vdash new\ Empty} \qquad \text{(Axioma 1)}$$

$$\frac{}{\vdash push_x\ Top_x}\ ,\ \text{para todo}\ \ x \in I\!N \qquad \text{(Axioma 2)}$$

$$\frac{}{\Delta \vdash push_x\ pop\ \Delta}\ ,\ \text{para todo}\ \ x \in I\!N \qquad \text{(Axioma 3)}$$

Vejamos a ideia intuítiva que está por detrás de cada um destes axiomas:

- O axioma 1 diz-nos que quando se cria uma nova stack, ela é sempre vazia.
- O axioma 2 diz-nos que quando colocamos um elemento na stack esse elemento fica posicionado no topo da stack.

- O axioma 3 diz-nos que a validade de qualquer asserção não é alterada após a ocorrência de um evento $push_x$ seguido de um evento pop. Ou seja, a remoção de elementos é feita no topo do stack. Note-se que Δ é uma meta-variável e como tal, representa qualquer fórmula de $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$.

A relação de causa da stack é portanto a menor relação de causa em $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$ que verifica estes três axiomas.

Vejamos agora alguns exemplos de provas que poderão ser feitas sobre este sistema que acabamos de definir.

- Os elementos da forma

$$\vdash new\ push_x\ pop\ Empty$$

pertencem à relação de causa.

PROVA:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash new\ Empty}\,(Ax.1) \qquad \dfrac{\dfrac{}{Empty \vdash push_x\ pop\ Empty}\,(Ax.3)}{new\ Empty \vdash new\ push_x\ pop\ Empty}\,(Causa)}{\vdash new\ push_x\ pop\ Empty}\,(Corte)$$

- Vejamos que na relação de causa da stack infinita de naturais é válida a regra

$$\dfrac{}{\Delta \vdash push_x\ push_y\ pop\ pop\ \Delta} \quad , \text{ para todo } \ x, y \in I\!N$$

PROVA:

$$\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash push_x\ pop\ \Delta}\,(Ax.3) \qquad \dfrac{\dfrac{}{pop\ \Delta \vdash push_y\ pop\ pop\ \Delta}\,(Ax.3)}{push_x\ pop\ \Delta \vdash push_x\ push_y\ pop\ pop\ \Delta}\,(Causa)}{\Delta \vdash push_x\ push_y\ pop\ pop\ \Delta}\,(Corte)$$

- Vejamos que as consequências da forma $\vdash push_x\ push_y\ pop\ Top_x$, para $x \in I\!N$, são demonstráveis.

PROVA:

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash push_x\ Top_x}\,(Ax.2) \qquad \dfrac{\dfrac{}{Top_x \vdash push_y\ pop\ Top_x}\,(Ax.3)}{push_x\ Top_x \vdash push_x\ push_y\ pop\ Top_x}\,(Causa)}{\vdash push_x\ push_y\ pop\ Top_x}\,(Corte)$$

3.4 A Álgebra de um Agente

Os agentes são, como acabamos de ver, sistemas lógicos. Vamos agora, com base na sua definição, gerar uma álgebra e analisar de que maneira essa álgebra irá reflectir a lógica do agente.

Teorema 3.1
Seja $< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ *um agente. A relação de causa,* $\vdash$*, gera em* $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$ *uma pré-ordem para a qual a união de conjuntos é a conjunção.*

PROVA: Vejamos em primeiro lugar que a relação $\vdash$ é realmente uma pré-ordem.

A reflexividade de $\vdash$ está provada no lema 3.3. Para provar a transitividade note-se que o lema 3.9 nos garante que, caso Θ seja finito, se verifica

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta \quad \Theta \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta'}$$

Se tivermos $\Gamma \vdash \Delta$ e $\Delta \vdash \Delta'$, com Δ não necessariamente finito, então como a relação $\vdash$ é compacta temos que $\exists \Gamma_0 \subseteq_f \Gamma \, \forall \Delta_0 \subseteq_f \Delta$, $\Gamma_0 \vdash \Delta_0$ e $\exists \Delta_0 \subseteq_f \Delta \, \forall \Delta'_0 \subseteq_f \Delta'$, $\Delta_0 \vdash \Delta'_0$. Portanto, $\exists \Gamma_0 \subseteq_f \Gamma$, $\Delta_0 \subseteq_f \Delta \, \forall \Delta'_0 \subseteq_f \Delta'$, $\quad \Gamma_0 \vdash \Delta_0$ e $\Delta_0 \vdash \Delta'_0$.

Logo, pelo lema 3.9 (super-corte),

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Delta_0 \quad \Delta_0 \vdash \Delta'_0}{\Gamma_0 \vdash \Delta'_0}$$

Provamos, portanto, que $\exists \Gamma_0 \subseteq_f \Gamma \, \forall \Delta'_0 \subseteq_f \Delta'$, $\Gamma_0 \vdash \Delta'_0$; ou seja $\Gamma \vdash \Delta$.

Acabamos de ver que $\vdash$ determina em $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$ uma pré-ordem. Vejamos agora que a conjunção de quaisquer Δ e Δ' em $\mathcal{P}(F)$ corresponde à sua união (aqui geralmente escrita da forma Δ, Δ'):

(i) Pelo lema 3.2 temos que $\Delta, \Delta' \vdash \Delta$ e $\Delta, \Delta' \vdash \Delta'$

(ii) Se $\Gamma \vdash \Delta$ e $\Gamma \vdash \Delta'$ então, pelo lema 3.4, $\Gamma \vdash \Delta, \Delta'$

De (i) e (ii) conclui-se que Δ, Δ' é a maior fórmula que é, simultaneamente, menor do que Δ e Δ'; logo, é a conjunção de Δ e Δ' (isto é, $\Delta \wedge \Delta' = \Delta, \Delta'$)
□

Esta pré-ordem, gerada pela relação de causa, não garante a existência de disjunções de quaisquer duas fórmulas.

É também fácil de ver que esta pré-ordem não é geralmente uma ordem parcial, uma vez que a relação $\vdash$ não é anti-simétrica. Se tivermos $\Gamma \vdash \Delta$ e $\Delta \vdash \Gamma$ não há nada na definição de $\vdash$ que obrigue a que Γ e Δ tenham de ser iguais. Não podemos, no entanto, deixar de sentir que fórmulas com estas características devem ser de algum modo "logicamente equivalentes".

A estrutura de pré-ordem de $\vdash$, embora muito pobre, pode ser facilmente enriquecida por processos bem conhecidos. Com base na pré-ordem $\vdash$ podemos definir uma relação de equivalência $\sim$, da seguinte forma:

$$\Gamma \sim \Delta \qquad sse \qquad \Gamma \vdash \Delta \;\text{ e }\; \Delta \vdash \Gamma$$

Consideramos, portanto, equivalentes fórmulas que são consequência uma da outra. Dizemos que duas fórmulas Δ e Γ que verifiquem $\Delta \sim \Gamma$ são *logicamente equivalentes.*

O conjunto das classes de equivalência determinadas pela relação $\sim$ será representado por $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C},\vdash}$ ou, abreviadamente (sendo $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$), por $\mathcal{F}_A$. Aos elementos de $\mathcal{F}_A$ chamam-se as *propriedades* do agente. Assim, propriedades são conjuntos de fórmulas fechadas pela equivalência $\sim$ gerada pela relação $\vdash$.

Fórmulas que sejam logicamente equivalentes podem ser tratadas como semanticamente iguais. Não distinguiremos uma classe de equivalência de um seu representante. Assim, quando falarmos de propriedades tanto nos podemos estar a referir à classe de equivalência como a um seu representante.

Proposição 3.1

Seja $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ um agente. A relação binária $\leq$ em $\mathcal{F}_A$ definida por: sendo $[\Gamma], [\Delta] \in \mathcal{F}_A$,

$$[\Gamma] \leq [\Delta] \qquad sse \qquad \Gamma \vdash \Delta$$

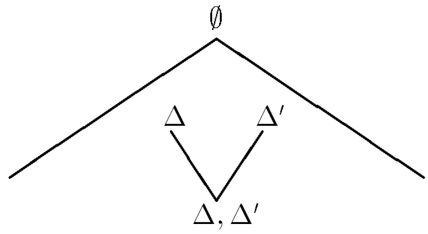
constituí uma ordem parcial.

PROVA: Trivial.

□

Temos já uma ordem parcial com conjunção definida. Vejamos também que esta ordem parcial tem elemento terminal 1 que é o conjunto vazio de asserções (ou seja $1 = \emptyset$) uma vez que para qualquer Γ, $\Gamma \vdash$ verifica-se sempre.

$(\mathcal{F}_A, \leq)$ tem, portanto, a estrutura de um semi-reticulado conjuntivo.



Do ponto de vista lógico, esta estrutura tem apenas a propriedade sempre verdadeira, $\emptyset$, e a conjunção de propriedades.

Esta estrutura de semi-reticulado pode agora ser enriquecida por uma construção conhecida: a construção da *lógica de um semi-reticulado.* Por este processo alcançaremos a estrutura de um local.

Tomemos os subconjuntos de $\mathcal{F}_A$, e construamos os conjuntos O da forma

$$O \doteq \downarrow(\mu) \quad , \text{ com } \quad \mu \subseteq \mathcal{F}_A$$

O conjunto de todos os elementos desta forma será denotado por $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$.

Ordenando $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ por inclusão, as disjunções podem ser construídas por uniões e as conjunções por intersecções.

Proposição 3.2

O conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ ordenado por inclusão tem a estrutura de um local. A este local dá-se o nome de **lógica gerada por** $\mathcal{F}_A$.

PROVA: Vejamos então que $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ constituí um local:

- $\mathcal{F}_A = \downharpoonleft(\{\emptyset\})$ é o maior elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$
- $\emptyset = \downharpoonleft(\{\})$ é o menor elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$
- se $O \doteq \downharpoonleft(\mu)$ e $O' \doteq \downharpoonleft(\mu')$ então,
  - $O \cup O' = \downharpoonleft(\mu \cup \mu')$
    pois
    $$\begin{array}{rcl} O \cup O' & = & \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta) \mid \Delta \in \mu\} \cup \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta') \mid \Delta' \in \mu'\} \\ & = & \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta) \mid \Delta \in \mu \text{ ou } \Delta \in \mu'\} \\ & = & \downharpoonleft(\mu \cup \mu') \end{array}$$
  - $O \cap O' = \downharpoonleft(\{\Delta \wedge \Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \mu'\})$
    pois
    $$\begin{array}{rcl} O \cap O' & = & \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta) \mid \Delta \in \mu\} \cap \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta') \mid \Delta' \in \mu'\} \\ & = & \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta \wedge \Delta') \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \mu'\} \\ & = & \downharpoonleft(\{\Delta \wedge \Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \mu'\}) \end{array}$$
- sendo $O \doteq \downharpoonleft(\mu)$ e $O_i \doteq \downharpoonleft(\mu_i)$,
  - $\bigcup_i O_i = \downharpoonleft(\bigcup_i \mu_i)$
    pois
    $$\begin{array}{rcl} \bigcup_i O_i & = & \bigcup_i \downharpoonleft(\mu_i) \\ & = & \bigcup_i \{\downharpoonleft(\Delta) \mid \Delta \in \mu_i\} \\ & = & \{\downharpoonleft(\Delta) \mid \Delta \in \bigcup_i \mu_i\} \\ & = & \downharpoonleft(\bigcup_i \mu_i) \end{array}$$
  - $O \cap \bigcup_i O_i = \bigcup_i (O \cap O_i)$
    pois
    $$\begin{array}{rcl} O \cap \bigcup_i O_i & = & \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta) \mid \Delta \in \mu\} \cap \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta') \mid \Delta' \in \bigcup_i \mu_i\} \\ & = & \bigcup\{\downharpoonleft(\Delta \wedge \Delta') \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \bigcup_i \mu_i\} \\ & = & \downharpoonleft(\{\Delta \wedge \Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \bigcup_i \mu_i\}) \\ & = & \bigcup_i \downharpoonleft(\{\Delta \wedge \Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \mu_i\}) \\ & = & \bigcup_i (O \cap O_i) \end{array}$$

Portanto, o conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ munido da inclusão tem a estrutura de um local, uma vez que é fechado para conjunções finitas, disjunções arbitrárias e as conjunções finitas distribuem pelas disjunções arbitrárias.
□

Os conjuntos $\downharpoonleft(\Delta) \doteq \{\Gamma \in \mathcal{F}_A \mid \Gamma \vdash \Delta\}$ representam todas as propriedades que são mais fortes do que Δ. Sendo assim, os elementos da lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$, sendo da forma $\downharpoonleft(\mu)$, com $\mu \subseteq \mathcal{F}_A$, podem ser expressos por:

$$\{\Gamma \in \mathcal{F}_A \mid \exists \Delta \in \mu : \Gamma \vdash \Delta\} \qquad , \quad \text{com } \mu \subseteq \mathcal{F}_A$$

e representam todas as propriedades que são mais fortes do que alguma propriedade de μ.

Em termos concretos, os elementos $\downarrow(\mu)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ são disjunções de propriedades e cada propriedade Δ é vista como uma conjunção de asserções.

A lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ tem elemento máximo, $\downarrow(\{\emptyset\})$, e elemento mínimo, $\downarrow(\{\})$, que corresponde à noção de verdadeiro e falso, respectivamente.

Resumindo, a lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$, gerada pelo semi-reticulado $\mathcal{F}_A$, tem:

- conjunções finitas, incluindo a conjunção vazia que corresponde ao *verdadeiro*.
- disjunções arbitrárias, incluindo a disjunção vazia que corresponde ao *falso*.
- distributividade da disjunção pela conjunção finita.
- distributividade da conjunção finita pela disjunção arbitrária.

Note-se que $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ não tem conjunções infinitas, negação, nem implicação.

Esta lógica, pelas características que exibe, pode ser inserida na classe das *lógicas geométricas*.

4 Caracterização Semântica dos Agentes

Neste capítulo iremos apresentar uma estrutura matemática capaz de capturar o conteúdo semântico de um agente.

Um dos aspectos essenciais de um agente $<\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ é o seu conjunto de asserções que podemos identificar com o conjunto $\mathcal{C}^* \times \Sigma$. Uma componente deste conjunto é o conjunto de traços $\mathcal{C}^*$ (sequências de eventos). Vamos, antes de mais, apresentar alguns conceitos ligados à noção de traço que nos irão ser úteis à caracterização semântica dos agentes.

4.1 Traços

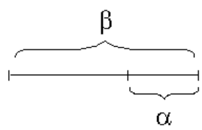
A semântica dos agentes requer o conceito de traço. Como já se viu, entendemos por traços, as sequências de eventos potencialmente infinitas para o passado e que vão ser justificações de observações presentes. Uma vez que nos agentes, a causa essencial de uma asserção A face a um evento a é representada pela asserção aA, nos nossos traços os eventos que estão à esquerda são anteriores a eventos que surjam à sua direita, e portanto os traços são sequências de eventos potencialmente infinitas à esquerda. Por outro lado, estamos interessados em que a comparação entre traços seja feita com base no passado mais recente. Vamos assim definir no conjunto de traços a ordem dos sufixos.

Dado que o conjunto das asserções de um agente é isomorfo ao conjunto $\mathcal{C}^* \times \Sigma$, vamos tomar o monóide livre $\mathcal{C}^*$, para aí construir a ordem parcial dos sufixos. Depois, por um processo de compactificação serão geradas as sequências infinitas a partir das sequências finitas.

Em $\mathcal{C}^*$ definimos a ordem dos *sufixos* do seguinte modo: sendo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^*$,

$$\alpha \leq \beta \quad \text{sse} \quad \exists \gamma \in \mathcal{C}^* : \beta = \gamma\alpha$$

$\alpha \leq \beta$ lê-se "α é sufixo de β".



É fácil de ver que $(\mathcal{C}^*, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

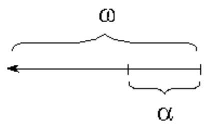
O conjunto das sequências de eventos potencialmente infinitas à esquerda que denotaremos por $\mathcal{C}^\infty$ é gerado a partir de $(\mathcal{C}^*, \leq)$ por um processo bem conhecido denominado *completação por ideais.*

Cada $\omega \in \mathcal{C}^\infty$ pode ser visto como o limite superior mínimo de uma cadeia $S \subseteq \mathcal{C}^*$. Mais precisamente, constroem-se os ideais de $(\mathcal{C}^*, \leq)$, uma vez que em $(\mathcal{C}^*, \leq)$ todo o ideal é uma cadeia. Os ideais maximais (que são as cadeias infinitas de $\mathcal{C}^*$) estão associados às sequências infinitas, e os restantes ideais estão associados às sequências finitas.

O conjunto $Idl(\mathcal{C}^*)$ dos ideais de $\mathcal{C}^*$ ordenado por inclusão constitui, como se sabe, uma ordem parcial completa. O conjunto $Idl(\mathcal{C}^*)$ identifica-se com o conjunto $\mathcal{C}^\infty$ e, consequentemente, a ordem de inclusão em $Idl(\mathcal{C}^*)$ vai corresponder em $\mathcal{C}^\infty$ à ordem dos sufixos. Note-se que esta ordem é consistente com a ordem dos sufixos que definimos em $\mathcal{C}^*$ e, como tal, será representada igualmente pelo símbolo $\leq$.

Sendo $\alpha, \omega \in \mathcal{C}^\infty$,

$$\alpha \leq \omega \quad \text{sse} \quad \exists \gamma \in \mathcal{C}^\infty : \omega = \gamma\alpha$$



O conjunto das sequências infinitas à esquerda de eventos representa-se por $\mathcal{C}^\omega$, pelo que podemos dizer que

$$\mathcal{C}^\infty = \mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}^\omega$$

Como se sabe, $(\mathcal{C}^\infty, \leq)$ constitui uma ordem parcial algébrica e consistentemente completa.

Facilmente se vê que os elementos finitos de $\mathcal{C}^\infty$ são as sequências finitas $\alpha \in \mathcal{C}^*$; assim $K(\mathcal{C}^\infty) = \mathcal{C}^*$.

Uma vez que por definição o conjunto $\mathcal{C}$ é contável, temos também que o conjunto $K(\mathcal{C}^\infty)$ é contável e como tal, $(\mathcal{C}^\infty, \leq)$ é um domínio de Scott.

4.2 Propriedades Observáveis

Como já vimos, estamos interessados na caracterização dos traços, sequências de eventos que se estendem do presente para o passado; ou melhor, sequências que evoluem do passado (eventualmente, do passado mais remoto) para o presente.

$\mathcal{C}^\infty$ denota o conjunto dos traços. Na nossa prespectiva os eventos à esquerda precedem os elementos que estão à sua direita na sequência e o último evento da sequência (ou seja, o mais à direita) ocorre no instante presente.

As propriedades que um observador poderá detectar num traço terão de ser independentes da sequência de eventos já ocorrida antes do início da observação, uma vez que o observador não tem esse conhecimento.

Se um observador que iniciou o seu estudo de uma sequência de eventos num instante t no passado, poder no presente afirmar que a sequência satisfaz a propriedade P é porque essa propriedade se verifica sempre, qualquer que seja a sequência de eventos que tenha ocorrido antes do instante t. Esta é a característica que faz com que apelidemos estas propriedades de *observáveis*.

Um observador que esteja a analizar um traço desde um dado instante no passado até ao presente, pode com certeza notar certas propriedades no traço que está a analisar. No entanto, as suas conclusões só podem ser baseadas na análise do segmento final finito da sequência de eventos em questão, pois a sua observação da só tem início num dado instante no passado. O observador não pode estar a observar o traço desde o passado mais longínquo até ao presente.

É evidente que um traço infinito poderá ter propriedades que nunca serão detectadas pelo observador. Podemos então pôr a questão:

Que propriedades são observáveis ?

Uma resposta informal a esta questão pode ser dada, dizendo que só são observáveis as propriedades que para serem detectadas apenas necessitam de uma observação finita. Ou seja, uma propriedade é observável se ela poder ser detectada com base apenas numa quantidade finita de informação.

Para formalizar a resposta, vamos identificar a propriedade P com o conjunto das sequências de eventos que a verificam. Deste modo, uma propriedade é vista como um subconjunto de $\mathcal{C}^\infty$. Assim, a sequência α verifica a propriedade P quando $\alpha \in P$. Com base nisto, e lembrando que $\leq$ representa a ordem dos sufixos, podemos apresentar a seguinte definição de propriedade observável.

Definição 4.1

P é uma **propriedade observável** *de $\mathcal{C}^\infty$ se:*

(i) $P \subseteq \mathcal{C}^\infty$

(ii) $\gamma \in P \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in \mathcal{C}^* : \quad \alpha \leq \gamma \;\; e \;\; \uparrow(\alpha) \subseteq P$

□

A alínea (i) diz-nos que P é uma propriedade. A alínea (ii) dá a condição que caracteriza uma propriedade observável, e que poderá ser lida por:

> a sequência γ satisfaz a propriedade P se a análise de algum segmento final finito de γ (alguma aproximação finita de γ) é suficiente para o afirmar.

As propriedade observáveis são, portanto, conjuntos superiores; mais concretamente, conjuntos da forma $\uparrow(S)$, com $S \subseteq \mathcal{C}^*$.

Note-se que sendo P uma propriedade observável, se a propriedade P não for satisfeita por uma sequência de eventos, não é de esperar que esse facto seja finitamente observável se a sequência em questão for infinita. Isto porque para o constatar teríamos de iniciar a observação *"para além do infinito"*, o que não é possível.

Na classe das propriedades observáveis de $\mathcal{C}^\infty$ podem-se destacar as seguintes propriedades de fecho:

- *Conjunção finita*

  Suponhamos que $X_1, ..., X_n$ são propriedades observáveis e que a intersecção $X_1 \cap ... \cap X_n$ não é vazia. Então existe uma sequência $\sigma \in X_1 \cap ... \cap X_n$. Sendo $t_1, ..., t_n$ os instantes em que a observação se tem que iniciar para que se possa concluir que $\sigma \in X_1, ..., \sigma \in X_n$, pode-se concluir que $\sigma \in X_1 \cap ... \cap X_n$ se a observação se iniciar no instante $\min(t_1, ..., t_n)$.

  Portanto, se $X_1, ..., X_n$ são propriedades observáveis então $X_1 \cap ... \cap X_n$ é também um propriedade observável.

- *Disjunção arbitrária*

  Suponhamos que $\mathcal{P}$ é uma colecção de propriedades observáveis. Se $\sigma \in \bigcup \mathcal{P}$, então existe alguma propriedade observável, $X \in \mathcal{P}$, tal que $\sigma \in X$.

  Uma vez que X é uma propriedade observável, podemos concluir que $\sigma \in X$ se a observação se iniciar num dado instante finito t; mas então a conclusão de que $\sigma \in \bigcup \mathcal{P}$ também pode ser tirada se a observação se iniciar no instante t.

  Portanto, $\bigcup \mathcal{P}$ é uma propriedade observável.

Pela definição de propriedade observável em $\mathcal{C}^\infty$ é trivial verificar que os conjuntos $\emptyset$ e $\mathcal{C}^\infty$ são propriedades observáveis de $\mathcal{C}^\infty$. O conjunto vazio, $\emptyset$, caracteriza a propriedade impossível de satisfazer por qualquer sequência. O conjunto $\mathcal{C}^\infty$ caracteriza o outro extremo: a propriedade trivialmente satisfeita por qualquer traço.

Com o que foi aqui dito acabamos de provar que a classe das propriedades observáveis de $\mathcal{C}^\infty$ constitui uma topologia sobre $\mathcal{C}^\infty$. Como é óbvio, os conjuntos da forma $\uparrow(\alpha)$, com $\alpha \in \mathcal{C}^*$, constituem uma base desta topologia.

Depois de tudo o que se disse sobre propriedades observáveis, é fácil verificar que estas coincidem com os abertos da topologia de Scott em $\mathcal{C}^\infty$. Provemos então que toda a propriedade observável constitui um aberto de Scott.

Como sabemos, toda a propriedade observável é um conjunto da forma

$$O \doteq \bigcup_i \uparrow(\alpha_i) \quad , \quad \text{com} \quad \alpha_i \in \mathcal{C}^*$$

Vejamos então que os conjuntos desta forma verificam as duas condições que caracterizam os abertos de Scott:

(i) Se $x \in O$ então existe um dos α_i tal que $x \in \uparrow(\alpha_i)$. Logo, $\uparrow(x) \subseteq \uparrow(\alpha_i) \subseteq O$.

(ii) Para todo o conjunto dirigido $S \subseteq \mathcal{C}^\infty$, se $\bigvee S \in O$ então existe um dos α_i tal que $\bigvee S \in \uparrow(\alpha_i)$.
Uma vez que os conjuntos dirigidos de $\mathcal{C}^\infty$ são cadeias, temos duas situações a considerar:

- Se S é uma cadeia finita, $\bigvee S \in S$, pelo que
$$\bigvee S \in O \quad \Rightarrow \quad S \cap O \neq \emptyset$$
é trivialmente satisfeito.
- Se S é uma cadeia infinita
$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_n \leq \cdots$$
e $\bigvee S \geq \alpha_i$ então é porque existe um $\beta_j \in S$ tal que $\beta_j \geq \alpha_i$; pelo que $\beta_j \in \uparrow(\alpha_i)$
Logo $S \cap O \neq \emptyset$

Repare-se que a ideia intuítiva expressa nas duas condições dos abertos de Scott está precisamente de acordo com a noção de propriedade observável:

> a condição (i) diz-nos que se a informação x é suficiente para indicar que o teste O teve sucesso, então qualquer quantidade maior do que x de informação é também suficiente. (ii) diz-nos que se o limite de um conjunto dirigido de cada vez melhores aproximações passa o teste O então é porque alguma das aproximações já o passou. Portanto, a alínea (ii) está ligada à ideia de que os abertos correspondem a testes finitários.

Lema 4.1
A topologia das propriedades observáveis em $\mathcal{C}^\infty$ coincide com a topologia de Scott em $\mathcal{C}^\infty$.

PROVA: Sabemos que os conjuntos $\downarrow(x)$, com $x \in K(\mathcal{C}^\infty)$ constituem uma base da topologia de Scott em $\mathcal{C}^\infty$. Mas, $K(\mathcal{C}^\infty) = \mathcal{C}^*$ e os conjuntos da forma $\downarrow(x)$, com $x \in \mathcal{C}^*$ constituem uma base da topologia das propriedades observáveis. Portanto, estas duas topologias coincidem.
□

4.3 A Semântica dos Agentes

Dado um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, vimos já que uma das componentes geradas pela sua definição são as propriedades $\mathcal{F}_A$ e a lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ que lhe corresponde. Uma outra componente será o *espaço de traços*. O conjunto suporte deste espaço será o conjunto $\mathcal{C}^\infty$ das sequências de eventos finitas ou infinitas à esquerda. Falta definir sobre $\mathcal{C}^\infty$ uma topologia.

À partida, poderíamos pensar na topologia de Scott uma vez que esta se identifica com a topologia das propriedades observáveis. O espaço topológico de $\mathcal{C}^\infty$ munido com a topologia de Scott $\mathcal{T}_S$ será representado por $X_{A,S}$.

Este espaço, porém, não consegue capturar o conteúdo semântico do agente, na sua relação entre os traços e as propriedades.

Para construirmos uma topologia capaz de capturar a semântica da relação entre traços e propriedades dada pela relação de causa, $\vdash$, vamos antes de mais, dar a seguinte definição.

Definição 4.2

Dado um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, define-se a relação binária $\|\!-$ entre o conjunto de traços $\mathcal{C}^\infty$ e o conjunto de propriedades $\mathcal{F}_A$, da seguinte forma: sendo $\alpha \in \mathcal{C}^*$, $\omega \in \mathcal{C}^\omega$ e $\Delta \in \mathcal{F}_A$,

$$\text{(i)} \quad \alpha \|\!- \Delta \quad \textit{sse} \quad \vdash \alpha\, \Delta$$

$$\text{(ii)} \quad \omega \|\!- \Delta \quad \textit{sse} \quad \exists \alpha \in \mathcal{C}^* : \; \alpha \leq \omega \;\; e \;\; \vdash \alpha\, \Delta$$

A esta relação dá-se o nome de **relação de justificação** *e $\alpha \|\!- \Delta$ lê-se "α justifica Δ".*
□

Esta definição pode ser interpretada do seguinte modo:

> Por um lado, $\alpha \|\!- \Delta$ indica que $\emptyset \vdash \alpha\, \Delta$ mas, por outro lado, $\alpha\, \Delta \vdash \emptyset$ dado que $\emptyset$ é elemento terminal de $\mathcal{F}_A$. Conclui-se então que $\emptyset \sim \alpha\, \Delta$. Portanto, $\alpha \|\!- \Delta$ diz-nos que a causa essencial de Δ face à sequência de eventos α é trivialmente válida. Isto é, se a sequência de eventos α ocorrer temos a garantia de que Δ ocorre, sem que seja necessário verificar-se, previamente, alguma condição.

Quando temos $\alpha \|\!- \Delta$, qualquer sequência β da qual α seja sufixo satisfaz também $\beta \|\!- \Delta$, pois pela regra de causa é fácil de ver que

$$\frac{\vdash \alpha\, \Delta}{\vdash \beta\, \Delta} \quad , \text{ sendo } \; \alpha \leq \beta$$

Portanto, verifica-se que, sendo $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty$ e $\Delta \in \mathcal{F}_A$,

$$\text{se} \quad \alpha \|\!- \Delta \quad \text{e} \quad \alpha \leq \beta \quad \text{então} \quad \beta \|\!- \Delta \tag{1}$$

Basicamente, o que isto nos diz é que o conjunto dos traços que justificam uma dada propriedade Δ constituem uma propriedade observável.

Teorema 4.1

Seja $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ um agente. Para cada propriedade $\Delta \in \mathcal{F}_A$, o conjunto O_Δ definido por

$$O_\Delta \doteq \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega|\!\vdash \Delta\}$$

é um aberto de Scott.

PROVA: Para que O_Δ seja um aberto de Scott deve satisfazer as seguintes propriedades:

(s.1) $\alpha \in O_\Delta \quad \Rightarrow \quad \uparrow\!(\alpha) \subseteq O_\Delta$

(s.2) Para todo o subconjunto dirigido S de $\mathcal{C}^\infty$

$$\bigvee S \in O_\Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in S : \alpha \in O_\Delta$$

A propriedade (s.1) vem imediatamente de (1). Quanto a (s.2), note-se que se S é um conjunto dirigido de $\mathcal{C}^\infty$ então S é uma cadeia. Se S for uma cadeia finita então $\bigvee S \in S$ e portanto a implicação é trivial. Se S for uma cadeia infinita

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots$$

então $\bigvee S = \omega$ é uma sequência infinita. Mas então, pela definição de $|\!\vdash$,

$$\omega \in O_\Delta \;\Rightarrow\; \omega|\!\vdash \Delta \;\Rightarrow\; \exists \alpha \in \mathcal{C}^* : \alpha \leq \omega \text{ e } \alpha|\!\vdash \Delta$$

Logo, $\exists \alpha \in S : \alpha \in O_\Delta$.

Portanto, para cada $\Delta \in \mathcal{F}_A$, o conjunto O_Δ é um aberto de Scott.

□

Podemos pois dizer que cada propriedade Δ é *observável nos traços*, no sentido que o conjunto dos traços O_Δ que a justifica constitui uma propriedade observável.

Apesar dos elementos da família $\{O_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{F}_A}$ serem abertos de Scott, não há garantias de que a família globalmente forme uma topologia. Para isso terá de ser fechada para intersecções finitas e uniões arbitrárias.

Lema 4.2

A família $\{O_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{F}_A}$ é fechada para intersecções finitas.

PROVA: Dadas duas quaisquer propriedades $\Delta', \Delta'' \in \mathcal{F}_A$,

$$\begin{array}{rcl} O_{\Delta'} \cap O_{\Delta''} & = & \{\omega' \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega'|\!\vdash \Delta'\} \cap \{\omega'' \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega''|\!\vdash \Delta''\} \\ & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega|\!\vdash \Delta' \text{ e } \omega|\!\vdash \Delta''\} \\ & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega|\!\vdash \Delta', \Delta''\} \\ & = & O_{\Delta',\Delta''} \end{array}$$

□

Também se verifica que

$$\begin{array}{rcl} O_\emptyset & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega|\!\vdash \emptyset\} \\ & = & \mathcal{C}^\infty \end{array}$$

No entanto, $\{O_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{F}_A}$ não é fechada para uniões arbitrárias.

Vamos então tomar a família $\{O_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{F}_A}$ como base de uma topologia. Os abertos da topologia são portanto uniões de conjuntos desta família; ou seja, serão da forma

$$\bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta \quad , \quad \text{com } \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$$

Definição 4.3

Dado um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, designa-se por **topologia intrínseca** *do agente A, a topologia cujos abertos são da forma*

$$\bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta \quad , \quad \textit{com} \ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$$

sendo $O_\Delta \doteq \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \| \!\!- \Delta\}$.

A família $\{O_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{F}_A}$ é uma base desta topologia. Denota-se por X_A o espaço topológico que tem $\mathcal{C}^\infty$ como conjunto de pontos e cuja topologia é a topologia intrínseca do agente A.

□

A topologia intrínseca do agente $\Omega(X_A)$ é, evidentemente, mais grosseira do que a topologia de Scott $\mathcal{T}_S$, uma vez que todo o aberto de $\Omega(X_A)$ é também um aberto de Scott, mas nem todo o aberto de Scott é um aberto de $\Omega(X_A)$.

Vimos já como a estrutura de um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ gera $\mathcal{F}_A$ e X_A. Vamos agora analisar a relação entre as propriedades definidas em $\mathcal{F}_A$ e as propriedades observáveis definidas pela topologia de X_A.

Como vimos, cada aberto da topologia intrínseca do agente, $O \in \Omega(X_A)$ tem a forma genérica

$$\bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta \quad , \quad \text{com} \ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$$

Esta definição sugere-nos uma função ϕ que associa a cada propriedade $\Delta \in \mathcal{F}_A$ um aberto O_Δ.

Proposição 4.1

Dado um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, a função $\phi : \mathcal{F}_A \rightarrow \Omega(X_A)$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & \mathcal{F}_A \longrightarrow \Omega(X_A) \\ & & \Delta \longmapsto \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \| \!\!- \Delta\} \end{array}$$

constitui um homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos.

PROVA: Vejamos como a função ϕ preserva a estrutura de semi-reticulado. Sendo $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}_A$,

$$\begin{array}{rcl} \phi(\emptyset) & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \| \!\!- \emptyset\} \\ & = & \mathcal{C}^\infty \end{array}$$

pois, para todo $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$, $\alpha\,\emptyset = \emptyset$ e $\emptyset \vdash \emptyset$ é sempre válido.

$$\begin{array}{rcl} \phi(\Delta \wedge \Delta') & = & \{w \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \| \!\!- \Delta, \Delta'\} \\ & = & \{w \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \| \!\!- \Delta \text{ e } \omega \| \!\!- \Delta'\} \\ & = & \{w \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \| \!\!- \Delta\} \cap \{w \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \| \!\!- \Delta'\} \\ & = & \phi(\Delta) \cap \phi(\Delta') \end{array}$$

□

Lema 4.3

Seja $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ um agente, $\Gamma, \Delta \in \mathcal{F}_A$ e ϕ a função definida na proposição 4.1. Se $\Gamma \vdash \Delta$ então $\phi(\Gamma) \subseteq \phi(\Delta)$.

PROVA: Se $\Gamma \vdash \Delta$ então $\Gamma \leq \Delta$. Logo, como ϕ é um homomorfismo de semi-reticulados, $\phi(\Gamma) \subseteq \phi(\Delta)$.
□

$\mathcal{F}_A$ tem a estrutura de um semi-reticulado, no entanto, $\Omega(X_A)$ tem uma estrutura mais rica do que um semi-reticulado. $\Omega(X_A)$, sendo uma topologia, tem a estrutura de um local. Se, por um lado, os elementos $O_\Delta \in \Omega(X_A)$ são imagens, por ϕ, da propriedade Δ, por outro lado, existem abertos $O = \bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta$ que não são imagens por ϕ de nenhuma propriedade. Portanto, o morfismo ϕ não é sobrejectivo.

No entanto, podemos extender este morfismo ϕ tomando como domínio, não o conjunto de propriedades $\mathcal{F}_A$, mas a lógica por ele gerada, $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$.

Como já vimos (na secção 3.4), os elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ são conjuntos inferiores gerados por conjuntos de propriedades; ou seja, elementos da forma $\downarrow(\mu)$, com $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$.

Podemos então, extender a função ϕ a $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ associando a cada elemento $\downarrow(\mu)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ a união dos abertos $\phi(\Delta)$, para cada $\Delta \in \mu$.

Proposição 4.2

Dado um agente $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, a função $\Phi_A : \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \to \Omega(X_A)$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \longrightarrow \Omega(X_A) \\ & & \downarrow(\mu) \longmapsto \bigcup_{\Delta \in \mu} \phi(\Delta) \quad , \quad com\ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A) \end{array}$$

constituí um homomorfismo de locais[2].

PROVA: Vejamos que Φ_A é um homomorfismo de locais. Sendo $\downarrow(\mu)$, $\downarrow(\nu) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$, e $\{\downarrow(\mu_i)\}_i \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$,

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A(\mathcal{F}_A) & = & \Phi_A(\downarrow(\{\emptyset\})) \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \{\emptyset\}} \phi(\Delta) \\ & = & \phi(\emptyset) \\ & = & \mathcal{C}^\infty \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A(\emptyset) & = & \Phi_A(\downarrow(\{\})) \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \{\}} \phi(\Delta) \\ & = & \emptyset \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A(\downarrow(\mu) \cap \downarrow(\nu)) & = & \Phi_A(\downarrow\{a \wedge b \mid a \in \mu \text{ e } b \in \nu\}) \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \{a \wedge b \mid a \in \mu \ e \ b \in \nu\}} \phi(\Delta) \\ & = & \bigcup_{\Delta' \in \mu, \Delta'' \in \nu} \phi(\Delta' \wedge \Delta'') \\ & = & \bigcup_{\Delta' \in \mu, \Delta'' \in \nu} (\phi(\Delta') \cap \phi(\Delta'')) \\ & = & \bigcup_{\Delta' \in \mu} \phi(\Delta') \cap \bigcup_{\Delta'' \in \nu} \phi(\Delta'') \\ & = & \Phi_A(\downarrow(\mu)) \cap \Phi_A(\downarrow(\nu)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A(\bigcup_i \downarrow(\mu_i)) & = & \Phi_A(\downarrow(\bigcup_i \mu_i)) \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \cup_i \mu_i} \phi(\Delta) \\ & = & \bigcup_i (\bigcup_{\Delta \in \mu_i} \phi(\Delta)) \\ & = & \bigcup_i \Phi_A(\downarrow(\mu_i)) \end{array}$$

□

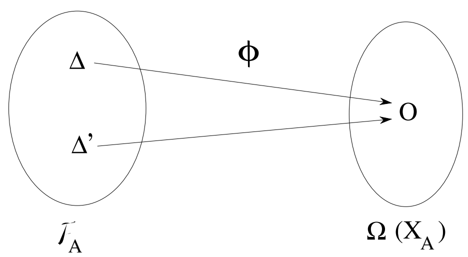
[2] *Um morfismo da categoria* **Frm**.

Lema 4.4
O morfismo Φ_A, acima apresentado, é sobrejectivo.

PROVA: Φ_A é sobrejectivo, uma vez que, sendo $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$, $\Phi_A(\downarrow(\mu)) = \bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta$ e todo o aberto de $\Omega(X_A)$ tem esta forma. Portanto, todo o aberto $\bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta$ é imagem por Φ_A de algum $\downarrow(\mu)$ de $\mathcal{F}(\mathcal{F}_A)$.
□

O morfismo Φ_A mostra a ligação existente entre as propriedades de $\mathcal{F}_A$ e as propriedades observáveis inerentes ao espaço topológico X_A. O facto de $\Phi_A : \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \to \Omega(X_A)$ ser sobrejectivo indica que todas as propriedades observáveis de $\Omega(X_A)$ são imagens de propriedades já definidas por $\mathcal{F}_A$ explicitamente, ou implicitamente através da lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$. A topologia $\Omega(X_A)$ pode ser assim vista como uma apresentação diferente das propriedades de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$.

Por outro lado, podemos ver que Φ_A não é necessariamente injectivo. Basta pensar que ϕ pode associar o mesmo aberto O a duas propriedades distintas Δ e Δ'.



Por exemplo, se tivermos um agente que tenha apenas os axiomas $\overline{\vdash a\, A}$ e $\overline{A \vdash B}$, temos que $A \not\sim B$ mas, $\phi(A) = \phi(B)$. Portanto, Φ_A não é injectivo, uma vez que ϕ também não é injectivo.

A semântica determinada pela relação de causa indica-nos que as propriedades não são independentes entre si e a não injectividade do morfismo Φ_A dá-nos precisamente esse tipo de informação semântica.

Podemos então dizer, de um modo informal, que a topologia $\Omega(X_A)$ capta a informação semântica essencial do agente e que o morfismo Φ_A faz a ligação entre as propriedades definidas na linguagem lógica e essa informação. Este morfismo é portanto uma componente fundamental na caracterização semântica do agente.

Adicionalmente, Φ_A consegue capturar a noção de causalidade, o que constituí uma característica fundamental deste morfismo.

Como vimos, dada uma qualquer propriedade Δ, existe a noção de causa essencial de Δ face a um evento a, que é representada pela propriedade $a\,\Delta$. Esta construção permite encarar a como uma função que a cada propriedade Δ associa a propriedade $a\,\Delta$.

Lema 4.5
Dado um agente $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, define-se para cada $a \in \mathcal{C}$ a função, com o mesmo nome, $a : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_A$ da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} a & : & \mathcal{F}_A \longrightarrow \mathcal{F}_A \\ & & \Delta \longmapsto a\Delta \end{array}$$

Estas funções são homomorfismos de semi-reticulados conjuntivos.

PROVA: Sendo $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}_A$,

$$a(\emptyset) = a\emptyset = \emptyset$$

$$a(\Delta \wedge \Delta') = a(\Delta, \Delta') = a\Delta, a\Delta' = a\Delta \wedge a\Delta' = a(\Delta) \wedge a(\Delta').$$

□

Estes morfismos a, induzem em $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ um homomorfismo de locais.

Proposição 4.3
Dado um agente $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, define-se para cada $a \in \mathcal{C}$ a função $a : \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} a & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \\ & & \downarrow(\mu) \longmapsto \downarrow(\{a\,\Delta \mid \Delta \in \mu\}) \end{array}$$

Estas funções são homomorfismos de locais.

PROVA: Sendo $\downarrow(\mu), \downarrow(\nu)) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ e $\{\downarrow(\mu_i)\}_i \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$,

$$\begin{array}{rcl} a(\mathcal{F}_A) & = & a(\downarrow(\{\emptyset\})) \\ & = & \downarrow(\{a\emptyset\}) \\ & = & \downarrow(\{\emptyset\}) \\ & = & \mathcal{F}_A \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a(\emptyset) & = & a(\downarrow(\{\})) \\ & = & \downarrow(\{\}) \\ & = & \emptyset \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a(\downarrow(\mu) \cap \downarrow(\nu)) & = & a(\downarrow(\{\Delta \wedge \Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \nu\})) \\ & = & \downarrow(\{a(\Delta \wedge \Delta') \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \nu\}) \\ & = & \downarrow(\{a\Delta \wedge a\Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \nu\}) \\ & = & a(\downarrow(\mu)) \cap a(\downarrow(\nu)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a(\bigcup_i \downarrow(\mu_i)) & = & a(\downarrow(\bigcup_i \mu_i)) \\ & = & \downarrow(\{a\Delta \mid \Delta \in \bigcup_i \mu_i\}) \\ & = & \bigcup_i \downarrow(\{a\Delta \mid \Delta \in \mu_i\}) \\ & = & \bigcup_i a(\downarrow(\mu_i)) \end{array}$$

□

Do lado dos traços, cada evento a também gera um morfismo que associa a cada traço ω, um traço ωa.

Proposição 4.4
Dado um agente $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, define-se para cada $a \in \mathcal{C}$ a função $a : \mathcal{C}^\infty \rightarrow \mathcal{C}^\infty$ da seguinte forma

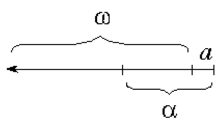
$$\begin{array}{rcl} a & : & \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \\ & & \omega \longmapsto \omega\, a \end{array}$$

Todas estas funções são contínuas na topologia de Scott.

PROVA: Como se sabe os conjuntos da forma $\uparrow(\alpha)$, com $\alpha \in \mathcal{C}^*$, constituem uma base da topologia $\mathcal{T}_S$. Os abertos de Scott são portanto conjuntos da forma $\bigcup_{\alpha \in P} \uparrow(\alpha)$, com $P \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^*)$. Vamos então ver que a imagem inversa de um aberto de Scott é ainda um aberto de Scott.

Seja $\alpha \in \mathcal{C}^*$ e $P \in \mathcal{P}(\mathcal{C}^*)$,

$$\begin{array}{rcl} a^{-1}(\uparrow(\alpha)) & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \alpha \leq \omega a\} \\ & = & \left\{ \begin{array}{lll} \emptyset & \text{se} & \not\exists \alpha' \in \mathcal{C}^* : \alpha = \alpha' a \\ \uparrow(\alpha') & \text{se} & \exists \alpha' \in \mathcal{C}^* : \alpha = \alpha' a \end{array} \right. \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} a^{-1}(\bigcup_{\alpha \in P} \uparrow(\alpha)) & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \alpha \leq \omega a \ \ , \text{com } \alpha \in P\} \\ & = & \bigcup_{\alpha \in P} \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \alpha \leq \omega a\} \\ & = & \bigcup_{\alpha \in P} a^{-1}(\uparrow(\alpha)) \end{array}$$

Provamos, portanto, que $a : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ é uma função contínua na topologia de Scott.
□

Resta agora saber se estas funções, geradas pelos eventos de um agente, são ainda funções contínuas quando consideramos o espaço topológico X_A.

Proposição 4.5

Para um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, as funções geradas pelos seus eventos

$$\begin{array}{rcl} a & : & \mathcal{C}^\infty \longrightarrow \mathcal{C}^\infty \\ & & \omega \longmapsto \omega\, a \end{array}$$

são contínuas na topologia intrínseca do agente A.

PROVA: Sabemos que a topologia $\Omega(X_A)$ é mais grosseira que a topologia de Scott, $\mathcal{T}_S$, e como tal $\Omega(X_A)$ está contido em $\mathcal{T}_S$. Como acabamos de ver, a^{-1} associa a cada elemento de $\mathcal{T}_S$ um elemento de $\mathcal{T}_S$; resta agora saber se, quando nos restringimos ao subconjunto $\Omega(X_A) \subseteq \mathcal{T}_S$, a imagem $a^{-1}(O)$ de um aberto O é ainda um elemento de $\Omega(X_A)$ ou é apenas um aberto de Scott genérico.

$$\begin{array}{rcl} \text{Seja} \quad O & = & \bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta \quad , \quad \text{com } \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A) \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \mu} \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \Vdash \Delta\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a^{-1}(O) & = & a^{-1}(\bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta) \\ & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega a \in \bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta\} \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \mu} \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega a \in O_\Delta\} \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \mu} \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega a \Vdash \Delta\} \end{array}$$

Atendendo à definição da relação $\Vdash$, para o caso de sequências finitas temos

$$\alpha a \Vdash \Delta \quad \text{sse} \quad \vdash (\alpha a)\Delta \quad \text{sse} \quad \vdash \alpha(a\Delta)$$

pelo que,

$$\{\alpha \in \mathcal{C}^* \mid \alpha a || \!\!- \Delta\} = \{\alpha \in \mathcal{C}^* \mid \alpha || \!\!- a\Delta\}$$

Considerando agora a definição de $||\!\!-$ extendida a sequências infinitas verifica-se (pelo mesmo motivo) que, sendo $\omega \in \mathcal{C}^\infty$,

$$\omega a || \!\!- \Delta \quad \text{sse} \quad \omega || \!\!- a\Delta$$

Portanto,

$$\{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega a || \!\!- \Delta\} = \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega || \!\!- a\Delta\}$$

Então

$$\begin{array}{rcl} a^{-1}(O) & = & \bigcup_{\Delta \in \mu} \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega || \!\!- a\Delta\} \\ & = & \bigcup_{\Delta \in \mu} O_{a\Delta} \end{array}$$

que é um aberto de $\Omega(X_A)$.

Concluímos então que a^{-1} associa a cada aberto de $\Omega(X_A)$ um aberto de $\Omega(X_A)$ e portanto, $a : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ é uma função contínua na topologia intrínseca do agente.
□

Usamos o nome de cada evento $a \in \mathcal{C}$ como identificador de três funções distintas, com domínios em $\mathcal{F}_A$, $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ e $\mathcal{C}^\infty$. Estas funções serão diferenciadas entre si pelo contexto onde irão ser usadas.

Sendo $a : \mathcal{C}^\infty \to \mathcal{C}^\infty$ uma função contínua em $\Omega(X_A)$, a função

$$\begin{array}{rcl} a^{-1} & : & \Omega(X_A) \longrightarrow \Omega(X_A) \\ & & \bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta \longmapsto \bigcup_{\Delta \in \mu} O_{a\Delta} \end{array} \quad , \text{ sendo } \mu \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$$

é, como se sabe, um homomorfismo de locais.

Estamos agora em condições de indicar a propriedade fundamental que caracteriza o morfismo $\Phi_A : \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \to \Omega(X_A)$, distinguindo-o dos homomorfismos genéricos de locais e capturando a noção de causalidade.

Teorema 4.2

Sendo A um agente $< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, para cada evento $a \in \mathcal{C}$ verifica-se que o seguinte diagrama de homomorfismos de locais

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) & \xrightarrow{a} & \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \\ \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_A \\ \Omega(X_A) & \xrightarrow[a^{-1}]{} & \Omega(X_A) \end{array}$$

comuta.

PROVA: Vejamos que este diagrama é realmente comutativo:
sendo $\Delta \in \mathcal{F}_A$, e considerando o homomorfismo de semi-reticulados $\phi : \mathcal{F}_A \to \Omega(X_A)$

$$\begin{array}{rcl} a^{-1}(\phi(\Delta)) & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega a \in \phi(\Delta)\} \\ & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega a |\!\vdash \Delta\} \\ & = & \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega |\!\vdash a\Delta\} \\ & = & \phi(a\Delta) \end{array}$$

Seja $\downarrow\!(\mu) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ e $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$,

$$\begin{array}{rcl} a^{-1}(\Phi_A(\downarrow\!(\mu))) & = & a^{-1}(\bigcup_{\Delta\in\mu} \phi(\Delta)) \\ & = & \bigcup_{\Delta\in\mu} a^{-1}(\phi(\Delta)) \\ & = & \bigcup_{\Delta\in\mu} \phi(a\Delta) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A(a(\downarrow\!(\mu))) & = & \Phi_A(\downarrow\!(\{a\Delta \mid \Delta \in \mu\})) \\ & = & \bigcup_{\Delta\in\mu} \phi(a\Delta) \end{array}$$

Portanto,

$$a^{-1}(\Phi_A(\downarrow\!(\mu))) = \Phi_A(a(\downarrow\!(\mu)))$$

□

Esta propriedade ligada à noção de causa que caracteriza o morfismo Φ_A está também presente (embora de diferente forma) na relação $|\!\vdash$ e no morfismo ϕ e é expresso pelas propriedades

$$\omega a |\!\vdash \Delta \quad \text{sse} \quad \omega |\!\vdash a\Delta$$

e

$$a^{-1}(\phi(\Delta)) = \phi(a\Delta)$$

Ou seja, todas estas propriedades traduzem a mesma informação, embora, num modo diferente.

Essencialmente, o que estas propriedades afirmam é que uma justificação para Δ face à ocorrência de um evento a, é uma justificação para a causa essencial de Δ face ao evento a.

Note-se que "uma justificação para Δ face à ocorrência de um evento a" é uma sequência de eventos passados que termina em a e que justifica Δ; isto é, é algo da forma ωa que satisfaz $\omega a |\!\vdash \Delta$. Como se prova, isso só é possível quando se verifica $\omega |\!\vdash a\Delta$; ou seja, quando ω é uma justificação para a "causa essencial de Δ face ao evento a".

Resumindo, um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ é semanticamente caracterizado pelo triplo

$$< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{F}_A$ das propriedades do agente, a sua topologia intrínseca X_A definida à custa da relação de justificação entre traços e propriedades, e o homomorfismo de locais Φ_A que faz a ligação entre a informação semântica captada em X_A e as propriedades definidas pela linguagem lógica capturando a noção de causalidade.

5 Modelos de Traços

A lógica definida por um agente $< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ requer, como é obvio, o estudo da sua semântica. No capítulo anterior fizemos já uma exposição das características semânticas dos agentes. No entanto, a lógica que descreve um agente pode, certamente, ter uma diversidade de *modelos*.

Em termos gerais, um modelo é um sistema de validação de fórmulas; ou seja, um sistema de regras que separam as fórmulas ditas válidas de fórmulas ditas não válidas.

Como todo o formalismo dos agentes foi desenvolvido com o objectivo de nos permitir descrever e raciocinar acerca do comportamento de sistemas concorrentes, vamos com certeza estar interessados em noções de validade ligadas à concorrência e comunicação. Por esse motivo, apresentaremos aqui modelos ligados à noção de evento e traço.

5.1 Caracterização dos Modelos de Traços de Agentes

À luz do triplo $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ que caracteriza semanticamente um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ surge, naturalmente, que um modelo de traços também seja caracterizado por um triplo

$$< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$$

em que $\mathcal{F}$ deverá ser um subconjunto de propriedades do agente, X um espaço topológico definido sobre um subconjunto dos traços e Φ_T um morfismo de valoração de propriedades do agente, para propriedades observáveis nos traços que seja, de algum modo, consistente com a semântica do agente: isto é, se um traço é uma justificação de uma determinada fórmula no agente e se o traço e a fórmula estão contidas no modelo, então também no modelo o traço deverá ser uma justificação da fórmula.

Esta é a noção heurística subjacente ao modelo de traços. Vejamos então qual será a definição formal do modelo de traços a que esta ideia nos irá conduzir e que condições serão necessárias impor às diversas componentes do triplo $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$.

Relembre que uma propriedade é uma classe de equivalência de fórmulas (logicamente equivalentes) e que as fórmulas de uma mesma classe podem ser tratadas como semanticamente iguais. Assim, poderemos muitas vezes referir-mo-nos a uma propriedade através de uma fórmula que a represente.

$\mathcal{F}$ é um subconjunto de propriedades do agente, ou seja $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$, e pode ser entendido como o conjunto das propriedades que "são vistas" no modelo. No entanto, $\mathcal{F}$ não deverá ser um subconjunto qualquer. $\mathcal{F}$ deverá conter a propriedade $\emptyset$ e a relação $\vdash$ restringida ao conjunto $\mathcal{F}$ deverá gerar aí a estrutura de um semi-reticulado. Isto, porque estamos interessados em que $\mathcal{F}$ seja capaz de gerar a lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ de um local. Como é obvio, sendo $\mathcal{F}$ um sub-semi-reticulado de $\mathcal{F}_A$, verifica-se que $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ é um sublocal de $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$. Ou seja, $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ é uma lógica com menos fórmulas do que $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$.

Por outro lado, em termos da noção de causa essencial, dado um $\Delta \in \mathcal{F}$ arbitrário, não haverá garantia de que a causa essencial de Δ face ao evento a, $a\,\Delta$, seja também uma das propriedades "vistas" pelo modelo. No entanto, o inverso deverá ser válido:

> Se $a\,\Delta$ for uma fórmula "vista" pelo modelo, então a fórmula Δ também o deverá ser.

Assim, $\mathcal{F}$ deverá ser um sub-semi-reticulado de $\mathcal{F}_A$ que verifica as condições:

$$\emptyset \in \mathcal{F} \tag{2}$$

e

$$a\,\Delta \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \Delta \in \mathcal{F} \tag{3}$$

Relativamente ao espaço topológico $X \doteq < |X|, \Omega(X) >$, poderemos dizer que

$$|X| \subseteq \mathcal{C}^{\infty}$$

o que significa que nem todos os traços terão de pertencer ao modelo. Poderão pertencer ao modelo apenas alguns traços.

No entanto, e como é desejável, o conjunto $|X|$ dos traços "vistos" no modelo deverá satisfazer a condição

$$\omega\, a \in |X| \quad \Rightarrow \quad \omega \in |X| \tag{4}$$

o que significa que $|X|$ deverá ser fechado para prefixos. A intuição que está por detrás desta condição é a de que se um traço, que é uma sequência de eventos que evolui do passado para o presente, é "visto" no modelo então é porque o modelo "vê" também a sequência de eventos ocorrida antes do último evento.

A topologia $\Omega(X)$ definida sobre $|X|$ deverá ser tal que os seus abertos deverão representar propriedades observáveis em $|X|$, o que significa que os abertos de $\Omega(X)$ deverão ser abertos da topologia de Scott sobre $|X|$. No entanto, como vimos, nem todo o aberto de Scott corresponde ao conjunto das justificações possíveis de alguma fórmula da lógica gerada por $\mathcal{F}$. Portanto, vamos apoiar a definição de $\Omega(X)$ na topologia intrínseca do agente, que é mais grosseira que a topologia $\mathcal{T}_S$. Isto é, a topologia $\Omega(X)$ é tal que

$$O \in \Omega(X) \quad sse \quad \exists O' \in \Omega(X_A) : \; O = |X| \cap O' \tag{5}$$

Notação: Uma vez que uma propriedade Δ determina unívocamente o elemento $\downarrow(\Delta)$ da lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$, podemos usar Δ em substituição de $\downarrow(\Delta)$, em situações onde pelo contexto se depreenda que estamos a falar do ideal $\downarrow(\Delta) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ e não da propriedade Δ de $\mathcal{F}_A$.

Quanto ao morfismo Φ_T de valoração das propriedades do agente para propriedades observáveis nos traços, este morfismo $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \Omega(X)$ deverá ser um homomorfismo sobrejectivo de locais, que é gerado por um homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos $\phi_T : \mathcal{F} \to \Omega(X)$ da maneira usual

$$\begin{array}{rcl} \Phi_T & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega(X) \\ & & \downarrow(\mu) \longmapsto \bigcup_{\Delta\in\mu} \phi_T(\Delta) \qquad , \text{ com } \; \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \end{array} \tag{6}$$

e que deverá satisfazer a seguinte condição:

$$(\omega\, a \in \Phi_T(\Delta) \;\text{ e }\; a\,\Delta \in \mathcal{F}) \quad sse \quad (\omega \in \Phi_T(a\,\Delta) \;\text{ e }\; \omega\, a \in |X|) \tag{7}$$

O facto de Φ_T ser sobrejectivo faz com que Φ_T determine, por si só, a topologia de X que é o contradomínio de Φ_T. Portanto, todas as propriedades observáveis no modelo são imagens de alguma fórmula da lógica gerada por $\mathcal{F}$.

A condição que se impõe a Φ_T transmite a seguinte informação:

Se $\omega\, a$ valida Δ no modelo e se $a\,\Delta$ é uma fórmula "vista" no modelo, então no mesmo modelo ω terá de validar $a\,\Delta$.

Por outro lado, se ω valida $a\,\Delta$ no modelo e se $\omega\, a$ é um traço "visível" no modelo então $\omega\, a$ terá de validar Δ nesse modelo.

Note-se que Φ_T sendo um homomorfismo de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ para $\Omega(X)$ está intimamente relacionado com a relação de causa $\vdash$, uma vez que é esta a relação de ordem de $\mathcal{F}$. Daqui surgem alguns resultados:

Lema 5.1
Seja $\mathcal{F}$ um sub-semi-reticulado de $\mathcal{F}_A$ que satisfaz as condições (2) *e* (3), *e Φ_T o homomorfismo de locais definido em* (6). *Sendo $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$, verifica-se:*

(i) $\Delta \vdash \Delta' \;\Rightarrow\; \Phi_T(\Delta) \subseteq \Phi_T(\Delta')$

(ii) $\Phi_T(\emptyset) = |X|$

(iii) $\Phi_T(\Delta \cup \Delta') = \Phi_T(\Delta) \cap \Phi_T(\Delta')$

PROVA:
(i) Sendo $\Delta \in \mathcal{F}$ os conjuntos $\downarrow(\Delta)$ são, como sabemos, da forma $\downarrow(\Delta) = \{\Gamma \in \mathcal{F} \mid \Gamma \vdash \Delta\}$. Daí que, sendo $\Delta \vdash \Delta'$ se verifique que $\downarrow(\Delta) \subseteq \downarrow(\Delta')$. Como Φ_T é um homomorfismo de locais temos que $\Phi_T(\downarrow(\Delta)) \subseteq \Phi_T(\downarrow(\Delta'))$ que é o que se quer provar, tendo em conta a notação usada.
(ii) e (iii) vêm directamente de Φ_T ser um homomorfismo de locais.
□

Lema 5.2
Seja $\mathcal{F}$ um sub-semi-reticulado de $\mathcal{F}_A$ que satisfaz as condições (2) *e* (3), *e Φ_T o homomorfismo de locais definido em* (6). *Se $\alpha \in |X|$ e $\alpha\,\Delta \in \mathcal{F}$ então*

$$\vdash \alpha\,\Delta \;\Rightarrow\; \alpha \in \Phi_T(\Delta)$$

PROVA: Seja $\alpha \in |X|$ e $\alpha\,\Delta \in \mathcal{F}$. Se $\vdash \alpha\,\Delta$ então, por (i) e (ii), $|X| \subseteq \Phi_T(\alpha\,\Delta)$; em particular, $\varepsilon \in \Phi_T(\alpha\,\Delta)$. Logo, pela condição (7), $\varepsilon \in \Phi_T(\alpha\,\Delta)$ sse $\alpha \in \Phi_T(\Delta)$, uma vez que sendo $\alpha = a_1 \ldots a_n$, $\alpha \in |X|$ e $\alpha\,\Delta \in \mathcal{F}$, verifica-se pelas condições (3) e (4) que $a_1 \ldots a_n,\, a_1 \ldots a_{n-1},\, \ldots,\, a_1 \in |X|$ e $a_1 \ldots a_n\,\Delta,\, a_2 \ldots a_n\,\Delta,\, \ldots,\, \Delta \in \mathcal{F}$.
□

Um modo alternativo de olhar para o morfismo Φ_T consiste em definir uma relação dita de justificação da forma que se segue.

Definição 5.1
Dado o homomorfismo $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \rightarrow \Omega(X)$ definido em (6), *define-se a relação binária $|\!\vdash$ entre o conjunto de traços $|X|$ e o conjunto de propriedades $\mathcal{F}$ da seguinte forma: sendo $\omega \in |X|$ e $\Delta \in \mathcal{F}$,*

$$\omega |\!\vdash \Delta \quad \textit{sse} \quad \omega \in \Phi_T(\Delta)$$

$\omega |\!\vdash \Delta$ lê-se "ω valida Δ" ou "ω é uma justificação de Δ". A esta relação dá-se o nome de **relação de validação** *ou* **relação de justificação**.
□

Em termos desta relação de justificação, o lema 5.2 pode ser escrito na forma

$$\vdash \alpha\,\Delta \;\;\Rightarrow\;\; \alpha|\!\vdash\Delta \qquad , \text{ se } \;\alpha \in |X| \;\text{ e }\; \alpha\,\Delta \in \mathcal{F}$$

A relação de justificação $|\!\vdash$ pode ser extendida para pares de fórmulas do modo que a seguir se apresenta.

Definição 5.2

Dada a relação de justificação $|\!\vdash$ *atrás definida e sendo* $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$*, diz-se que* Δ *é uma* **justificação** *de* Δ'*, e escreve-se* $\Delta|\!\vdash\Delta'$*, se todo o traço que justifica* Δ *também justifica* Δ'*. Ou seja,*

$$\Delta|\!\vdash\Delta' \quad sse \quad (\,\forall\omega \in |X|, \qquad \omega|\!\vdash\Delta \Rightarrow \omega|\!\vdash\Delta'\,)$$

□

Pela definição vemos que $\Delta|\!\vdash\Delta'$ sse $(\forall\omega \in |X|, \quad \omega \in \Phi_T(\Delta) \Rightarrow \omega \in \Phi_T(\Delta'))$, o que é equivalente a dizer que $\Phi_T(\Delta) \subseteq \Phi_T(\Delta')$. Portanto,

$$\Delta|\!\vdash\Delta' \quad \text{sse} \quad \Phi_T(\Delta) \subseteq \Phi_T(\Delta')$$

A alínea *(i)* do lema 5.1 diz-nos então que é válido

$$\Delta \vdash \Delta' \;\;\Rightarrow\;\; \Delta|\!\vdash\Delta'$$

que pode ser lido como "se Δ é uma causa de Δ' então Δ é uma justificação de Δ'". Esta é a definição usual de *correcção* de um modelo de uma lógica.

Nesta perspectiva, podemos dizer que só estamos interessados em modelos correctos e que a nossa definição de modelo irá implicar a correcção do mesmo, uma vez que com as condições que já impusemos para o modelo de traços, $\Delta \vdash \Delta' \Rightarrow \Delta|\!\vdash\Delta'$ verifica-se sempre.

A *completude* de um modelo de traços verifica-se quando a implicação é válida também em sentido contrário, ou seja,

$$\Delta|\!\vdash\Delta' \;\;\Rightarrow\;\; \Delta \vdash \Delta'$$

Em termos do morfismo $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \Omega(X)$, a condição da completude irá ser

$$\Phi_T(\Delta) \subseteq \Phi_T(\Delta') \quad \text{sse} \quad \Delta \vdash \Delta'$$

Isto significa que Φ_T tem necessariamente de ser injectiva. De facto, sendo $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$, $\Phi_T(\Delta) = \Phi_T(\Delta') \Rightarrow (\;\Phi_T(\Delta) \subseteq \Phi_T(\Delta')$ e $\Phi_T(\Delta') \subseteq \Phi_T(\Delta)\;) \Rightarrow \Delta \vdash \Delta'$ e $\Delta' \vdash \Delta \Rightarrow \Delta \sim \Delta'$; ou seja, Δ e Δ' são a mesma propriedade.

Como, por construção $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \Omega(X)$ já é um homomorfismo sobrejectivo de locais, se um modelo for completo Φ_T será obrigatoriamente um isomorfismo.

Portanto, a condição clássica de completude de uma lógica será aqui substituída pela condição de que a função $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \Omega(X)$ seja um isomorfismo. Nestas condições, as fórmulas da lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ e as propriedades observáveis nos traços em X seriam entidades absolutamente equivalentes. Isto significa que a análise do modelo poderá ser feita, equivalentemente, através da lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ ou através das propriedades observáveis de $\Omega(X)$.

A condição (7) que pode ser expressa por

$$(\omega\, a |\!\vdash \Delta \quad \text{e} \quad a\, \Delta \in \mathcal{F}) \quad \text{sse} \quad (\omega |\!\vdash a\, \Delta \quad \text{e} \quad \omega\, a \in |X|)$$

reflecte a noção de causalidade, entre os traços e as fórmulas que são "vistas" no modelo.

Note-se que, para $\omega \in |X|$ e $\Delta \in \mathcal{F}$ arbitrários, não há garantia de que $\omega\, a \in |X|$ ou de que $a\, \Delta \in \mathcal{F}$. Se acontecer de para todo $\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ e para todo $\omega \in \Phi_T(\Delta)$, $a\, \Delta \in \mathcal{F}$ e $\omega\, a \in |X|$, a condição (7) pode ser reduzida a

$$\omega\, a \in \Phi_T(\Delta) \quad \text{sse} \quad \omega \in \Phi_T(a\, \Delta)$$

o que corresponde a termos (vendo os eventos como morfismos)

$$a^{-1}(\Phi_T(\Delta)) = \Phi_T(a\, \Delta)$$

considerando a a seguinte função, contínua em X

$$\begin{aligned} a \quad : \quad & X \longrightarrow X \\ & \omega \longmapsto \omega\, a \end{aligned}$$

Ou seja, nestas condições o diagrama que se segue comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\Phi_T"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[d, "\Phi_T"] \\ \Omega(X) \arrow[r, "a^{-1}"'] & \Omega(X) \end{tikzcd}$$

Convém não esquecer que esta característica não estará presente em todos os modelos de traços de um agente, mas apenas naqueles modelos que verificam $\forall \Delta \in \mathcal{F} \forall \omega \in \Phi_T(a\, \Delta)$, $a\, \Delta \in \mathcal{F}$ e $\omega\, a \in |X|$.

Vejamos como é que as condições impostas até ao momento às entidades que compõem um modelo de traços vão caracterizar esse modelo.

O facto de $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \rightarrow \Omega(X)$ ser um homomorfismo de locais originou o lema 5.2 que diz que se o traço α e a propriedade Δ forem "vistas" no modelo e se verificar $\vdash \alpha\, \Delta$ então α terá de ser uma justificação de Δ no nosso modelo. Basicamente, o que se está a afirmar é que tudo aquilo que é justificado pela especificação do agente e que faz parte do modelo, tem também de ser justificado no modelo. Ou seja, se a especificação de um agente A exigir que $\vdash \alpha\, \Delta$, caso $\alpha \in |X|$ e $\Delta \in \mathcal{F}$, então α terá de ser no modelo uma justificação de Δ.

No entanto, o inverso pode não acontecer; isto é, podemos ter no modelo, $\alpha |\!\vdash \Delta$ sem que na especificação $\vdash \alpha\, \Delta$ seja uma consequência válida.

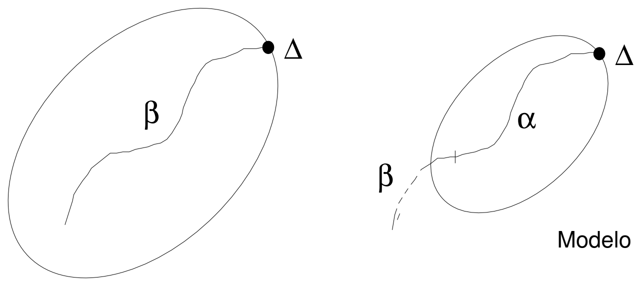
Portanto, o modelo pode justificar mais fórmulas do que as que estão previstas na especificação.

Contudo, com as condições impostas até agora, uma situação indesejável pode acontecer:

> Podem existir justificações na especificação, da forma $\vdash \alpha\, \Delta$, para as quais α não pertence ao modelo, apesar de Δ pertencer. Isto indica-nos que, com as condições que temos para o modelo, podem existir fórmulas que a especificação determina a validade e que o modelo não tem maneira de justificar.

Para contornar esta situação teremos de impor uma condição adicional aos modelos, que garanta que toda a propriedade válida prevista na especificação tenha uma contrapartida no modelo, sob a forma de justificação. Essa condição será a seguinte:

> Se, na especificação, β é uma justificação de um $\Delta \in \mathcal{F}$ então existe um $\alpha \in |X|$ que é um sufixo de β e que é uma justificação de Δ no modelo.



Esta condição pode ser formalmente caracterizada por:

$$\forall \Delta \in \mathcal{F}\ \forall \beta \in \mathcal{C}^*, \qquad \vdash \beta\,\Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in |X| :\ \alpha \leq \beta \text{ e } \alpha \in \Phi_T(\Delta) \tag{8}$$

Esta condição que está aqui escrita em termos de traços finitos, pode ser extendida para traços arbitrários.

Notação : A relação de justificação definida em 4.2 para um agente A, aí representada por $|\!\vdash$, passará agora a representar-se por $|\!\vdash_A$ para que possa ser distinguida da relação de justificação definida sobre o modelo de traços.

A condição (8) extendida para traços arbitrários será

$$\forall \Delta \in \mathcal{F}\ \forall \omega \in \mathcal{C}^\infty, \qquad \omega |\!\vdash_A \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in |X| :\ \alpha \leq \omega \text{ e } \alpha |\!\vdash \Delta \tag{9}$$

Recolhendo todas as considerações tecidas à volta do modelo de traços, vamos agora apresentar a sua definição formal.

Definição 5.3
Seja $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ um agente. Um **modelo de traços** *do agente A é um triplo*

$$< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$$

em que:

- *$\mathcal{F}$ é um sub-semi-reticulado de $\mathcal{F}_A$ que verifica as condições: sendo $a \in \mathcal{C}$ e $\Delta \in \mathcal{F}_A$,*
  - $\emptyset \in \mathcal{F}$
  - $a\,\Delta \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \Delta \in \mathcal{F}$
- *X é um espaço topológico $< |X|, \Omega(X) >$ tal que:*
  - *$|X|$ é subconjunto de $\mathcal{C}^\infty$ que verifica: sendo $\omega \in \mathcal{C}^\infty$ e $a \in \mathcal{C}$,*

$$\omega\, a \in |X| \quad \Rightarrow \quad \omega \in |X|$$

– *$\Omega(X)$ é uma topologia cujos abertos são da seguinte forma:*

$$O \in \Omega(X) \quad sse \quad \exists O' \in \Omega(X_A) :\ O = |X| \cap O'$$

- *$\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \Omega(X)$ é um homomorfismo de locais, sobrejectivo, gerado por um homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos $\phi_T : \mathcal{F} \to \Omega(X)$ do seguinte modo*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_T & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega(X) \\ & & \downarrow(\mu) \longmapsto \bigcup_{\Delta\in\mu} \phi_T(\Delta) \quad , \quad com\ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \end{array}$$

que deve satisfazer a seguinte condição:

$$(\omega\, a \in \Phi_T(\Delta) \ \ e \ \ a\,\Delta \in \mathcal{F}) \quad sse \quad (\omega \in \Phi_T(a\,\Delta) \ \ e \ \ \omega\, a \in |X|)$$

- *verifica-se a condição:*

$$\forall \Delta \in \mathcal{F}\ \forall \omega \in \mathcal{C}^\infty, \qquad \omega |\!\vdash_A \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in |X| :\ \alpha \leq \omega\ e\ \alpha \in \Phi_T(\Delta)$$

□

Lema 5.3
Dado um agente $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, o triplo $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ constitui um modelo de traços do agente.

PROVA: Trivial.
□

Um resultado importante que advém das condições que são impostas a um modelo de traços é o que se segue.

Teorema 5.1
Seja A um agente $<\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, e $<\mathcal{F}, X, \Phi_T>$ um modelo de traços de A. Sendo $i : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ o morfismo de inclusão da lógica gerada por $\mathcal{F}$ na lógica gerada por $\mathcal{F}_A$ (gerado pela inclusão de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}_A$), existe um único homomorfismo de locais $\zeta : \Omega(X) \to \Omega(X_A)$ que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \arrow[d, "\Phi_A"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\Phi_T"] \\ \Omega(X_A) & \Omega(X) \arrow[l, "\zeta"] \end{tikzcd}$$

PROVA: Para cada $\Phi_T(\Delta) \in \Omega(X)$, sendo $\Delta \in \mathcal{F}$, considerem-se os conjuntos da seguinte forma:

$$\{\omega \in \Phi_A(\Delta) \mid \ \alpha \leq \omega \ \text{ e } \ \alpha \in \Phi_T(\Delta)\}$$

Considerando a condição (9) que é imposta ao modelo de traços é fácil de ver que tais conjuntos correspondem aos conjuntos $\Phi_A(\Delta)$ pois, $\omega \in \Phi_A(\Delta) \Rightarrow \omega \Vdash_A \Delta \Rightarrow \exists \alpha \in |X|$: $\alpha \leq \omega$ e $\alpha \in \Phi_T(\Delta)$. Portanto, ζ será um morfismo que faz a seguinte transformação:

$$\Phi_T(\Delta) \longmapsto \bigcup_{\alpha \in \Phi_T(\Delta)} \uparrow(\alpha) \cap \Phi_A(\Delta)$$

que, como acabamos de ver, corresponde à transformação

$$\Phi_T(\Delta) \longmapsto \Phi_A(\Delta)$$

Uma vez que o morfismo Φ_T é sobrejectivo podemos definir ζ como sendo

$$\begin{array}{lll} \zeta & : & \Omega(X) \longrightarrow \Omega(X_A) \\ & & \Phi_T(\downarrow(\mu)) \longmapsto \bigcup_{\Delta \in \mu} \Phi_A(\Delta) \quad , \text{ sendo } \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \end{array}$$

Dado que Φ_A é um homomorfismo de locais, e tendo em conta a sua definição, é imediato ver que a função ζ faz comutar o diagrama: sendo $\downarrow(\mu) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$, com $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, $\zeta(\Phi_T(\downarrow(\mu))) = \bigcup_{\Delta \in \mu} \Phi_A(\Delta) = \bigcup_{\Delta \in \mu} \phi(\Delta) = \Phi_A(\downarrow(\mu))$.

Vejamos agora que ζ é realmente um homomorfismo de locais:

Sendo $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ e $\{\downarrow(\mu_i)\}_i \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{F})$,

$$\begin{array}{rcl} \zeta(|X|) & = & \zeta(\Phi_T(\downarrow\{\emptyset\})) = \bigcup\limits_{\Delta \in \{\emptyset\}} \Phi_A(\Delta) = \Phi_A(\emptyset) = \mathcal{C}^\infty \\ \zeta(\emptyset) & = & \zeta(\Phi_T(\downarrow\{\})) = \bigcup\limits_{\Delta \in \{\}} \Phi_A(\Delta) = \emptyset \\ \zeta(\Phi_T(\downarrow(\mu)) \cap \Phi_T(\downarrow(\nu))) & = & \zeta(\Phi_T(\downarrow(\nu) \cap \downarrow(\nu))) \\ & = & \zeta(\Phi_T(\downarrow\{\Delta' \wedge \Delta'' \mid \Delta' \in \text{ e } \Delta'' \in \nu\})) \\ & = & \bigcup\limits_{\Delta \in \{\Delta' \wedge \Delta'' \mid \Delta' \in \mu \text{ e } \Delta'' \in \nu\}} \Phi_A(\Delta) \\ & = & \bigcup\limits_{\Delta' \in \mu, \Delta'' \in \nu} (\Phi_A(\Delta') \cap \Phi_A(\Delta'')) \\ & = & \bigcup\limits_{\Delta' \in \mu} \Phi_A(\Delta') \cap \bigcup\limits_{\Delta'' \in \nu} \Phi_A(\Delta'') \\ & = & \zeta(\Phi_T(\downarrow(\mu))) \cap \zeta(\Phi_T(\downarrow(\nu))) \\ \zeta(\bigcup\limits_i \Phi_T(\downarrow(\mu_i))) & = & \zeta(\Phi_T(\bigcup\limits_i \downarrow(\mu_i))) = \zeta(\Phi_T(\downarrow(\bigcup\limits_i \mu_i))) \\ & = & \bigcup\limits_{\Delta \in \bigcup_i \mu_i} \Phi_A(\Delta) = \bigcup\limits_i (\bigcup\limits_{\Delta \in \mu_i} \Phi_A(\Delta)) \\ & = & \bigcup\limits_i \zeta(\Phi_T(\downarrow(\mu_i))) \end{array}$$

Uma vez provado que existe um $\zeta : \Omega(X) \to \Omega(X_A)$ nas condições do teorema é fácil ver que ele é único, pois se existir um outro homomorfismo de locais $\varphi : \Omega(X) \to \Omega(X_A)$ tal que $\varphi(\Phi_T(\downarrow(\mu))) = \Phi_A(\downarrow(\mu))$ então $\varphi(\Phi_T(\downarrow(\mu))) = \zeta(\Phi_T(\downarrow(\mu)))$. Como Φ_T é sobrejectiva, $\varphi = \zeta$. Portanto, ζ é único.

□

5.2 A Categoria dos Modelos de Traços

Como se sabe, na categoria **Loc** os objectos são locais e os morfismos são as transformações inversas dos homomorfismos de locais; têm sentido contrário ao dos homomorfismos respectivos. Para não complicar a notação daremos o mesmo nome tanto ao homomorfismo de locais como ao morfismo respectivo na categoria **Loc**.

Um resultado imediato do teorema 5.1 é o de que a construção de um modelo de traços para um agente A implica que na categoria **Loc** exista o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \arrow[r, "i"] & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \\ \Omega(X_A) \arrow[u, "\Phi_A"] \arrow[r, "\zeta"'] & \Omega(X) \arrow[u, "\Phi_T"'] \end{tikzcd}$$

Este resultado sugere-nos a seguinte definição categorial para a noção de morfismo entre modelos de traços de agentes.

Definição 5.4
Dados dois modelos de traços de agentes, $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ *e* $< \mathcal{F}', X', \Phi'_T >$, *um* **morfismo de modelos de traços**

$$\eta \, : < \mathcal{F}, X, \Phi_T > \longrightarrow < \mathcal{F}', X', \Phi'_T >$$

é um par de homomorfismos $< \eta_{\mathcal{L}}, \eta_{\Omega} >$, *em que:*

(i) $\eta_{\mathcal{L}}$ *é um homomorfismo de locais entre as lógicas geradas por* $\mathcal{F}'$ *e* $\mathcal{F}$

$$\eta_{\mathcal{L}} \, : \, \mathcal{L}(\mathcal{F}') \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

Este homomorfismo é gerado por um homomorfismo de semi-reticulados entre $\mathcal{F}'$ *e* $\mathcal{F}$*.*

(ii) η_{Ω} *é um homomorfismo de locais entre as topologias de* X' *e* X

$$\eta_{\Omega} \, : \, \Omega(X') \longrightarrow \Omega(X)$$

de tal modo, que o seguinte diagrama em **Loc**

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{L}}"] & \mathcal{L}(\mathcal{F}') \\ \Omega(X) \arrow[u, "\Phi_T"] \arrow[r, "\eta_{\Omega}"'] & \Omega(X') \arrow[u, "\Phi'_T"'] \end{tikzcd}$$

comuta.

□

Saliente-se que a definição de morfismo de modelos de traços não exige que os modelos sejam necessariamente do mesmo agente.

A existência de morfismos entre modelos de traços levanta a hipótese de ser definível uma categoria que tenha por objectos modelos de traços e, como morfismos, os morfismos de modelos de traços. Vejamos, pois, se tal categoria é definível:

- Sendo $\eta\ :< \mathcal{F}, X, \Phi_T > \rightarrow < \mathcal{F}', X', \Phi'_T >$ e $\psi :< \mathcal{F}', X', \Phi'_T > \rightarrow < \mathcal{F}'', X'', \Phi''_T >$ morfismos de modelos de traços, a composição destes dois morfismos é o morfismo $\psi \circ \eta :< \mathcal{F}, X, \Phi_T > \rightarrow < \mathcal{F}'', X'', \Phi''_T >$ que se define como sendo o par de homomorfismos $< \eta_{\mathcal{L}} \circ \psi_{\mathcal{L}}, \eta_\Omega \circ \psi_\Omega >$. Confirmemos que $\psi \circ \eta$ é de facto um morfismo de modelos de traços:

  - $\eta_{\mathcal{L}} \circ \psi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}(\mathcal{F}'') \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$ é um homomorfismo de locais, pois resulta da composição dos homomorfismos de locais $\psi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}(\mathcal{F}'') \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}')$ e $\eta_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}(\mathcal{F}') \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$.
  - $\eta_\Omega \circ \psi_\Omega : \Omega(X'') \rightarrow \Omega(X)$ é um homomorfismo de locais, pois resulta da composição dos homomorfismos de locais $\psi_\Omega : \Omega(X'') \rightarrow \Omega(X')$ e $\eta_\Omega : \Omega(X') \rightarrow \Omega(X)$.

  E o diagrama em **Loc**[3]

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\psi_{\mathcal{L}} \circ \eta_{\mathcal{L}}"] & \mathcal{L}(\mathcal{F}'') \\
\Omega(X) \arrow[u, "\Phi_T"] \arrow[r, "\psi_\Omega \circ \eta_\Omega"'] & \Omega(X'') \arrow[u, "\Phi''_T"']
\end{tikzcd}$$

  comuta, pois

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{L}}"] & \mathcal{L}(\mathcal{F}') \arrow[r, "\psi_{\mathcal{L}}"] & \mathcal{L}(\mathcal{F}'') \\
\Omega(X) \arrow[u, "\Phi_T"] \arrow[r, "\eta_\Omega"'] & \Omega(X') \arrow[u, "\Phi'_T"'] \arrow[r, "\psi_\Omega"'] & \Omega(X'') \arrow[u, "\Phi''_T"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\Phi''_T \circ (\psi_\Omega \circ \eta_\Omega) &= (\Phi''_T \circ \psi_\Omega) \circ \eta_\Omega = (\psi_{\mathcal{L}} \circ \Phi'_T) \circ \eta_\Omega = \\
&= \psi_{\mathcal{L}} \circ (\Phi'_T \circ \eta_\Omega) = \psi_{\mathcal{L}} \circ (\eta_{\mathcal{L}} \circ \Phi_T) = \\
&= (\psi_{\mathcal{L}} \circ \eta_{\mathcal{L}}) \circ \Phi_T
\end{aligned}$$

  Por outro lado, é evidente que a composição de morfismos de modelos de traços é associativa, uma vez que a composição de homomorfismos de locais é associativa.

- Para todo o modelo de traços $m \doteq < \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ existe o morfismo identidade $id_m :< \mathcal{F}, X, \Phi_T > \rightarrow < \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ que corresponde ao par $< id_{\mathcal{L}}, id_\Omega >$ em que $id_{\mathcal{L}}$ é a identidade em $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ e id_Ω a identidade em $\Omega(X)$.

[3] Note-se que os homomorfismos de locais dão origem a morfismos de sentido inverso na categoria **Loc**. Por isso, a composição de morfismos em **Loc** é feita na ordem inversa de composição de homomorfismos de locais.

Podemos, pois, definir a categoria de modelos de traços de agentes.

Definição 5.5
Mod *é a* categoria dos modelos de traços de agentes*, cujos objectos são modelos de traços de agentes e cujos morfismos são os morfismos de modelos de traços, apresentados na definição 5.4.*
□

Para um dado agente $A \doteq< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, podemos definir a categoria de todos os modelos de traços deste agente.

Definição 5.6
Seja $A \doteq< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ *um agente.* $\mathbf{ModT}_A$ *é a* categoria dos modelos de traços do agente A*. Os seus objectos são modelos de traços de* A *e os morfismos são os morfismos de modelos de traços,* $< \eta_{\mathcal{L}}, \eta_{\Omega} >$*, em que o homomorfismo* $\eta_{\mathcal{L}}$ *é uma inclusão.*
□

$\mathbf{ModT}_A$ é, evidentemente, uma subcategoria de **Mod**.

Corolário 5.1
Seja $A \doteq< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ *um agente. O modelo de traços* $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ *do agente* A *é o objecto inicial da categoria* $\mathbf{ModT}_A$ *dos modelos de traços de* A*.*
$< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ *designa-se de* **modelo de traços inicial** *de* A *ou, simplesmente,* **modelo inicial** *de* A*.*

PROVA: Qualquer que seja o modelo $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ do agente A, pelo teorema 5.1, existe um único homomorfismo de locais $\zeta : \Omega(X) \to \Omega(X_A)$ que faz comutar o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \arrow[d, "\Phi_A"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\Phi_T"] \\ \Omega(X_A) & \Omega(X) \arrow[l, "\zeta"] \end{tikzcd}$$

Portanto, existe sempre um único morfismo de modelos de traços de $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ para $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ que é caracterizado pelo par de homomorfismos $< i, \zeta >$

$$< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A > \xrightarrow{<i,\zeta>} < \mathcal{F}, X, \Phi_T >$$

Pelo que $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ é o objecto inicial da categoria $\mathbf{ModT}_A$.
□

Uma vez que qualquer agente $A \doteq< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ é semanticamente caracterizado pelo triplo $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$, uma subcategoria que tem grande interesse extrair da categoria **Mod**, é a categoria cujos objectos são apenas os modelos iniciais de agentes e em que os morfismos são os morfismos de modelos de traços.

Dado que $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ capta toda a informação semântica do agente, podemos encarar tal categoria como a categoria dos agentes.

Definição 5.7

Ag *é a* categoria dos agentes*, cujos objectos são modelos de traços iniciais de agentes e cujos morfismos são os morfismos de modelos de traços.*

□

Ag é, claramente, uma subcategoria de **Mod**.

O facto da categoria $\mathbf{ModT}_A$ dos modelos de um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ ter objecto inicial leva-nos a investigar sobre a possível existência de um objecto terminal para esta categoria.

Um modelo de traços com potencialidades para ser modelo terminal é o modelo

$$< \mathcal{F}^\bullet, X^\bullet, \Phi_T^\bullet >$$

em que:

$\mathcal{F}^\bullet$ é o semi-reticulado $\{\emptyset\}$;

$X^\bullet$ é o espaço topológico que tem como conjunto de pontos o conjunto $\mathcal{C}^\infty$ e cuja topologia é a topologia indiscreta de $\mathcal{C}^\infty$, cujos abertos são $\emptyset$ e $\mathcal{C}^\infty$;

$\Phi_T^\bullet$ é o seguinte homomorfismo de locais:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_T^\bullet & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \Omega(X^\bullet) \\ & & \downarrow(\{\emptyset\}) \longmapsto \mathcal{C}^\infty \\ & & \downarrow(\{\}) \longmapsto \emptyset \end{array}$$

É fácil de ver que $\Phi_T^\bullet$ é gerado pelo homomorfismo de semi-reticulados $\phi : \mathcal{F}^\bullet \to \Omega(X^\bullet)$ que transforma a formula $\emptyset$ no conjunto dos traços que a justificarem $\{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega |\!\vdash_A \emptyset\}$ que, como se sabe, corresponde a $\mathcal{C}^\infty$.

Vejamos então que o triplo $< \mathcal{F}^\bullet, X^\bullet, \Phi_T^\bullet >$ constituí um modelo de traços. Relativamente a $\mathcal{F}^\bullet$ é evidente que $\mathcal{F}^\bullet$ satisfaz as condições que lhe são impostas, uma vez que $a\,\emptyset = \emptyset$, sendo $a \in \mathcal{C}$.

Quanto ao espaço topológico $X^\bullet$, é óbvio que $|X^\bullet|$ satisfaz a condição (4) e a topologia $\Omega(X^\bullet)$ satisfaz a condição (5), pois tanto $\emptyset$ como $\mathcal{C}^\infty$ são abertos de $\Omega(X_A)$.

No que diz respeito a $\Phi_T^\bullet$, tendo em conta que, sendo $a \in \mathcal{C}$, $a\,\emptyset = \emptyset$ e que $\Phi_T^\bullet(\downarrow(\{\emptyset\})) = \mathcal{C}^\infty$ é fácil de ver que a condição (7) é satisfeita. A condição(9) é também trivialmente satisfeita.

Lema 5.4

Seja $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ um agente. O modelo de traços $< \mathcal{F}^\bullet, X^\bullet, \Phi_T^\bullet >$ do agente A, acima definido, é o objecto terminal da categoria $\mathbf{ModT}_A$ *dos modelos de traços de A.*

$< \mathcal{F}^\bullet, X^\bullet, \Phi_T^\bullet >$ *designa-se de* **modelo de traços terminal** *de A, ou simplesmente,* **modelo terminal** *de A.*

PROVA: Qualquer que seja o modelo de traços $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ do agente A, existe sempre um morfismo $< i, \psi >$ que faz comutar o diagrama (de homomorfismos de locais)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[d, "\Phi_T"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}^\bullet) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\Phi_T^\bullet"] \\ \Omega(X) & \Omega(X^\bullet) \arrow[l, "\psi"] \end{tikzcd}$$

O homomorfismo i, por definição de $\mathbf{ModT}_A$, deverá ser a inclusão. Como, por definição $\emptyset \in \mathcal{F}$, é evidente que $\mathcal{L}(\mathcal{F}^\bullet)$ está contida em $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Vejamos agora como deverá ser ψ para o diagrama comutar. Sabemos que $\Phi_T(\downarrow\{\emptyset\}) = |X|$, $\Phi_T^\bullet(\downarrow\{\emptyset\}) = \mathcal{C}^\infty$, $\Phi_T(\downarrow\{\}) = \emptyset$ e $\Phi_T^\bullet(\downarrow\{\}) = \emptyset$; portanto, ψ deverá transformar $\mathcal{C}^\infty \mapsto |X|$ e $\emptyset \mapsto \emptyset$ o que pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \psi & : & \Omega(X^\bullet) \longrightarrow \Omega(X) \\ & & O \longmapsto |X| \cap O \end{array}$$

Pela construção que fizemos do morfismo $< i, \psi >$ é evidente que ele é único, uma vez que $\Omega(X^\bullet)$ é a topologia indiscreta de $\mathcal{C}^\infty$.

Portanto, existe um único morfismo de qualquer modelo de traços $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ para o modelo $< \mathcal{F}^\bullet, X^\bullet, \Phi_T^\bullet >$ e é caracterizado pelo par de homomorfismos $< i, \psi >$

$$< \mathcal{F}, X, \Phi_T > \stackrel{<i,\psi>}{\longrightarrow} < \mathcal{F}^\bullet, X^\bullet, \Phi_T^\bullet >$$

Pelo que $< \mathcal{F}^\bullet, X^\bullet, \Phi_T^\bullet >$ é o objecto terminal da categoria $\mathbf{ModT}_A$.
□

Lema 5.5

Seja $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ *um agente e* $m_1 \doteq < \mathcal{F}_1, X_1, \Phi_1 >$ *e* $m_2 \doteq < \mathcal{F}_2, X_2, \Phi_2 >$ *modelos de traços do agente A. A relação entre modelos de traços definida por*

$$m_1 \leq m_2 \quad \textit{sse} \quad \exists < i, \psi > \in mor(\mathbf{ModT}_A) : \; m_1 \stackrel{<i,\psi>}{\longrightarrow} m_2$$

constituí uma ordem parcial a menos de isomorfismo.

PROVA: A reflexividade e transitividade é assegurada pela própria definição de categoria que garante a existência do morfismo identidade e da composição de morfismos. Analisemos agora a anti-simetria da relação $\leq$.

Suponhamos que $m_1 \leq m_2$ e $m_2 \leq m_1$, então é porque existem dois morfismos $< \mathcal{F}_1, X_1, \Phi_1 > \stackrel{<i,\psi>}{\longrightarrow} < \mathcal{F}_2, X_2, \Phi_2 >$ e $< \mathcal{F}_2, X_2, \Phi_2 > \stackrel{<j,\varphi>}{\longrightarrow} < \mathcal{F}_1, X_1, \Phi_1 >$, e os seguintes diagramas (de homomorfismos de locais) comutam

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}_1) \arrow[d, "\Phi_1"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}_2) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\Phi_2"] \\ \Omega(X_1) & \Omega(X_2) \arrow[l, "\psi"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}_1) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\Phi_1"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}_2) \arrow[d, "\Phi_2"] \\ \Omega(X_1) \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega(X_2) \end{tikzcd}$$

Uma vez que tanto i como j correspondem a inclusões, temos que $\mathcal{L}(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{F}_2)$.

Por outro lado, temos $\Phi_1(\Delta) = \psi(\Phi_2(\Delta))$ e $\Phi_2(\Delta) = \varphi(\Phi_1(\Delta))$. Portanto, $\Phi_1(\Delta) = \psi(\varphi(\Phi_1(\Delta)))$ e $\Phi_2(\Delta) = \varphi(\psi(\Phi_2(\Delta)))$.

Como tanto Φ_1 como Φ_2 são sobrejectivos, temos que $\psi \circ \varphi = id_{\Omega(X_1)}$ e $\varphi \circ \psi = id_{\Omega(X_2)}$. Portanto, $\Omega(X_1) \cong \Omega(X_2)$.

□

5.3 Um Exemplo

Nesta secção vamos retomar o exemplo da stack. Vamos considerar um agente que especifica o comportamento de uma stack de bits, e construir um modelo de traços para esse agente.

Considere-se a seguinte declaração de um agente que especifica uma stack infinita de bits:

- O conjunto das asserções primitivas será

$$\Sigma \doteq \{Empty, Top_1, Top_0\}$$

- O conjunto de conectivas (eventos) será

$$\mathcal{C} \doteq \{new, push_1, push_0, pop\}$$

- A relação de causa deste agente é gerada pelas seguintes regras de inferência:

$$\frac{}{\vdash new\ Empty}$$

$$\frac{}{\vdash push_0\ Top_0} \qquad \frac{}{\vdash push_1\ Top_1}$$

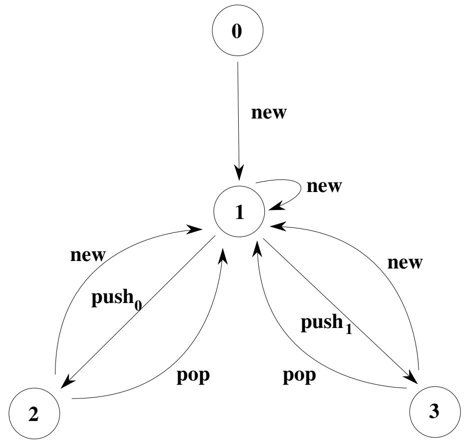
$$\frac{}{\Delta \vdash push_0\ pop\ \Delta} \qquad \frac{}{\Delta \vdash push_1\ pop\ \Delta}$$

Note-se que Δ é uma meta-variável e como tal, representa qualquer fórmula de $\mathcal{F}_{\Sigma,\mathcal{C}}$.

Este agente especifica o comportamento de uma stack infinita de bits. Esta estrutura de dados, sendo infinita, é na realidade impossível de implementar num computador, pois estas máquinas apesar de serem cada vez mais poderosas, não deixam de ser máquinas finitas.

Para modelo deste agente vamos considerar uma stack finita. Vamos ver como, por exemplo, uma stack de uma só célula poderá ser um modelo deste agente. Vejamos então como teremos de definir cada um dos componentes que caracterizam um modelo de traços.

Seja $|X|$ o conjunto de traços gerado pelo autómato



em que 0 é o estado inicial e todos os estados são finais. Note-se que 0 é, simultaneamente, estado inicial e final, pelo que $\varepsilon \in |X|$.

É óbvio que $|X|$ satisfaz a condição

$$\omega\, a \in |X| \quad \Rightarrow \quad \omega \in |X|$$

Cada aberto da topologia $\Omega(X)$ é o resultado da intersecção de cada aberto de $\Omega(X_A)$ com $|X|$. Temos portanto definido o espaço topológico $X \doteq < |X|, \Omega(X) >$.

Vejamos agora o conjunto $\mathcal{F}$ das propriedades do modelo. Seja F o conjunto das asserções do modelo definido por

$$F \doteq \{\alpha\, A \mid \ \alpha \in |X| \ \text{ e } \ A \in \Sigma\}$$

$\mathcal{F}$ é o conjunto das classes de equivalência de $\mathcal{P}(F)$ para a relação de equivalência $\sim$ definida do seguinte modo:

$$\Gamma \sim \Delta \quad \text{ sse } \quad \Gamma \vdash \Delta \ \text{ e } \ \Delta \vdash \Gamma$$

Por tudo o que se disse na secção 3.4, é evidente que $\mathcal{F}$ é um sub-semi-reticulado de $\mathcal{F}_A$.

No que respeita ao homomorfismo de locais $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \Omega(X)$, ele é gerado pelo morfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi_T & : & \mathcal{F} \longrightarrow \Omega(X) \\ & & \Delta \longmapsto \{\alpha \in |X| \mid \ \vdash \alpha\, \Delta\} \end{array}$$

da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_T & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega(X) \\ & & \downarrow\!(\mu) \longmapsto \bigcup_{\Delta \in \mu} \phi_T(\Delta) \end{array}$$

Vejamos que a condição (7) é satisfeita:

$(\omega\, a \in \Phi_T(\Delta) \text{ e } a\,\Delta \in \mathcal{F}) \Rightarrow (\vdash \omega\, a\,\Delta \text{ e } a\,\Delta \in \mathcal{F}) \Rightarrow (\vdash \omega\,(a\,\Delta) \text{ e } a\,\Delta \in \mathcal{F}) \Rightarrow$
$\omega \in \Phi_T(a\,\Delta)$

$(\omega \in \Phi_T(a\,\Delta) \text{ e } \omega\, a \in |X|) \Rightarrow (\vdash \omega\,(a\,\Delta) \text{ e } \omega\, a \in |X|) \Rightarrow (\vdash \omega\, a\,\Delta \text{ e } \omega\, a \in |X|)$
$\Rightarrow \omega\, a \in \Phi_T(\Delta)$

A condição (9) é também satisfeita: $\forall \Delta \in \mathcal{F}\, \forall \omega \in \mathcal{C}^{\infty}$,

$$\omega \| \!\!-_A \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in \mathcal{C}^* : \alpha \leq \omega \text{ e } \vdash \alpha\Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha \in |X| : \alpha \leq \omega \text{ e } \alpha \| \!\!- \Delta$$

Portanto, o triplo $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ aqui exposto, que representa uma stack de uma só célula, constituí um modelo de traços para o agente acima descrito.

6 Modelos de Estados

A caracterização de sistemas computacionais conduz-nos sempre à noção de estado. Estado é um conceito associado à noção de "abstração do passado": o passado que impõe realidades futuras deve ser abstraido, no presente, por algo que o caracterize completamente.

Se pensarmos na definição de agente, vemos que esta não tem em si uma noção de estado explicita. Essa noção vai ser conseguida, semanticamente, através da definição de um outro tipo de modelos, diferente dos modelos de traços, aos quais daremos o nome de *modelos de estados*.

6.1 Definições Genéricas

Um tipo de modelo muito usado no estudo do comportamento de sistemas são os clássicos sistemas de transição [19, 5, 24]. Um sistema de transição consiste num conjunto de estados e um conjunto de transições entre estados. Essas transições são etiquetadas de modo a poderem indicar os eventos que elas representam.

Um modelo de estados de um agente não é mais do que um sistema de transição, enriquecido com uma relação de validação entre estados e propriedades, que verifica certas condições. Vejamos a sua definição formal.

Definição 6.1
Um **modelo de estados** *de um agente* $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ *é uma estrutura*

$$< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$$

em que,

- $\mathcal{K}$ *é um conjunto de* estados*;*
- $\mathcal{F}$ *é um subconjunto de propriedades de* $\mathcal{F}_A$*; ou seja,* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_A$*.* $\mathcal{F}$ *são as propriedades* visíveis *no modelo.*
- δ *é uma família indexada por* $\mathcal{C}$ *de relações binárias em* $\mathcal{K}$*, chamadas* relações de transição*. Escrevemos* $k \xrightarrow{a} k'$ *para indicar que* $(k, k') \in \delta_a$*;*
- $\models$ *é uma* relação de validação *entre estados e propriedades; ou seja,* $\models \subseteq \mathcal{K} \times \mathcal{F}$*.* $k \models \Delta$ *deverá ler-se "k valida* Δ*" ou "*Δ *é válida no estado k".*

e aonde é válida a seguinte condição (aqui apresentada em formato de regra):

sendo $q, k \in \mathcal{K}$*,* $a \in \mathcal{C}$ *e* $\Delta \in \mathcal{F}$*,*

$$\frac{q \models a\,\Delta \quad q \xrightarrow{a} k}{k \models \Delta} \tag{10}$$

□

Note-se que a condição (10) imposta, implica que o conjunto $\mathcal{F}$ das propriedades visíveis verifique a seguinte condição:

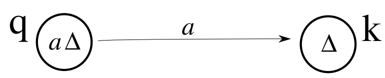
$$a\,\Delta \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \Delta \in \mathcal{F}$$

ou seja, se o modelo vê a causa essencial de Δ face ao evento a, ele deverá também ver Δ.

A condição (10) diz-nos que se a propriedade $a\,\Delta$ é válida no estado q e podemos transitar do estado q para o estado k pelo evento a, então o estado k deverá validar a propriedade Δ. Esta condição reflecte, portanto, a noção de causalidade entre eventos e propriedades:

> O estado q ao validar a causa essencial de Δ face ao evento a, $a\,\Delta$, está a validar a pré-condição mais fraca que é necessário impor para que após a ocorrência do evento a se possa garantir que Δ é válida.
>
> A transição $q \xrightarrow{a} k$ simula a ocorrência do evento a, quando estamos no estado q, sendo k o estado a que se chega imediatamente após a ocorrência de a.
>
> Pelo que se acabou de dizer, a justificação para que k deva validar Δ surge naturalmente.

Esta situação pode ser esquematicamente representada por

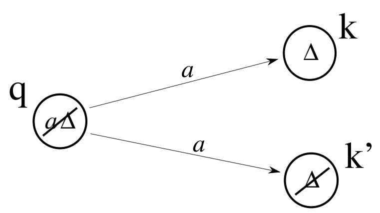


representando cada estado por uma circunferência dentro da qual assinalamos as propriedades que nos interessa pôr em evidência.

Se olharmos com atenção para a definição de modelo de estados apresentada, vemos que pode acontecer que $k \models \Delta$, $q \xrightarrow{a} k$ e no entanto, $q \not\models a\,\Delta$.

À primeira vista isto pode parecer um pouco contraditório com o que se disse acima. De facto, se k valida Δ e $q \xrightarrow{a} k$, fará sentido q não validar $a\,\Delta$?

$a\,\Delta$ é a causa essencial de Δ face ao evento a, e representa a pré-condição mais fraca que é necessário validar para que após a ocorrência do evento a se possa garantir que Δ é válida. Portanto, se $a\,\Delta$ não é válida, não temos a garantia de que após a ocorrência do evento a, a propriedade Δ seja válida, no entanto, isso pode acontecer. Ou seja, se q não validar a propriedade $a\,\Delta$, o estado para o qual se transita de q pela ocorrência do evento a tanto pode validar Δ como não validar.



Neste sentido, há um certo grau de não determinismo em modelos deste género: de um dado estado não se pode prever todas as propriedades que serão válidas após a ocorrência de um dado evento.

Por esse motivo, chamaremos aos modelos aonde estas situações não ocorrem de *modelos determinísticos*.

Definição 6.2
Um modelo de estados $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ *de um agente* $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ *diz-se* **determinístico** *se verifica a seguinte condição (aqui apresentada na forma de regra):*

sendo $q, k \in \mathcal{K}$*,* $a \in \mathcal{C}$ *e* $\Delta \in \mathcal{F}$*,*

$$\frac{k \models \Delta \quad q \xrightarrow{a} k}{q \models a\,\Delta} \tag{11}$$

□

Os modelos de estados determinísticos, ao verificarem as condições (10) e (11), são modelos em que de qualquer estado se conhece à partida que propriedades passarão a ser válidas face à ocorrência de algum evento.

Notação: É por vezes conveniente extender a notação da relação de transição para sequências de acções. Assim, escrevemos

$$k \xrightarrow{\alpha} k' \quad , \text{ sendo } \alpha = a_1\, a_2 \cdots a_n$$

quando existem estados $k_1, \cdots, k_{n-1}$ tal que

$$k \xrightarrow{a_1} k_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} k_{n-1} \xrightarrow{a_n} k'$$

Definição 6.3
Seja A *um agente,* $m \doteq < \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ *um modelo de estados de* A *e* $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$*. Diz-se que* Δ *é uma* **justificação** *de* Δ' *no modelo* m*, e escreve-se* $\Delta \models \Delta'$*, se todo o estado de* m *que valida* Δ *também valida* Δ'*. Ou seja, sendo* $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$*,*

$$\Delta \models \Delta' \qquad sse \qquad (\forall k \in \mathcal{K}, \qquad k \models \Delta \quad \Rightarrow \quad k \models \Delta')$$

□

6.2 Modelos de Estados Correctos

Até ao momento, a noção de estado surgiu de maneira forçada pela definição de modelos de estados para os agentes. Não é isso que pretendemos, já que a nossa tese é que a noção de estado está inerentemente embebida na própria especificação do agente.

De certo modo, procuramos "o espaço de estados mais geral" que vem do próprio agente e do qual todos os outros espaços de estados nada mais são do que implementações.

Como vimos no capítulo 4, um agente A pode ser semanticamente caracterizado pela estrutura $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$. Vamos usar essa informação para gerar um modelo de estados.

A visão topológica dos espaços de traços leva-nos a questionar o modo como a topologia intrínseca de um agente separa pontos.

Consideremos um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$. A topologia intrínseca do agente A, $\Omega(X_A)$, tem por abertos os conjuntos da forma

$$\bigcup_{\Delta \in \mu} O_\Delta \quad , \quad \text{com } \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$$

em que $O_\Delta \doteq \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \,|\!\vdash_A \Delta\}$. A pré-ordem de especialização gerada por $\Omega(X_A)$ em $\mathcal{C}^\infty$ e que se define por: sendo $\omega, \omega' \in \mathcal{C}^\infty$,

$$\omega \preceq \omega' \quad \text{sse} \quad (\forall O \in \Omega(X_A), \quad \omega \in O \Rightarrow \omega' \in O)$$

pode ser, equivalentemente, descrita por :

$$\omega \preceq \omega' \quad \text{sse} \quad (\forall \Delta \in \mathcal{F}_A, \quad \omega \,|\!\vdash_A \Delta \Rightarrow \omega' \,|\!\vdash_A \Delta)$$

uma vez que os conjuntos da forma $O_\Delta \doteq \{\omega \in \mathcal{C}^\infty \mid \omega \,|\!\vdash_A \Delta\}$ constituem uma base da topologia $\Omega(X_A)$.

Como é sabido esta relação é uma pré-ordem e só é uma ordem parcial se o espaço topológico X_A for T_0. A razão porque não é necessariamente uma ordem parcial deriva de poder ocorrer $\omega \preceq \omega'$ e $\omega' \preceq \omega$ sem que $\omega = \omega'$.

Podemos, no entanto, definir uma relação de equivalência com base nesta pré-ordem fazendo

$$\omega \equiv_A \omega' \quad \text{sse} \quad (\omega \preceq \omega' \;\text{ e }\; \omega' \preceq \omega)$$

o que é equivalente a dizer

$$\omega \equiv_A \omega' \quad \text{sse} \quad (\forall O \in \Omega(X_A), \quad \omega \in O \Leftrightarrow \omega' \in O)$$

ou seja, dois traços $\omega, \omega' \in \mathcal{C}^\infty$ são equivalentes se não é possível separá-los usando a topologia $\Omega(X_A)$.

Esta relação pode ser descrita por

$$\omega \equiv_A \omega' \quad \text{sse} \quad (\forall \Delta \in \mathcal{F}_A, \quad \omega \,|\!\vdash_A \Delta \Leftrightarrow \omega' \,|\!\vdash_A \Delta)$$

Proposição 6.1

Seja $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ um agente e $\equiv_A$ a relação de equivalência em $\mathcal{C}^\infty$ definida por: sendo $\omega, \omega' \in \mathcal{C}^\infty$,

$$\omega \equiv_A \omega' \quad \textit{sse} \quad (\forall \Delta \in \mathcal{F}_A, \quad \omega \,|\!\vdash_A \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \omega' \,|\!\vdash_A \Delta) \tag{12}$$

A relação $\equiv_A$ satisfaz a seguinte propriedade: sendo $\omega, \omega' \in \mathcal{C}^\infty$ e $\alpha \in \mathcal{C}^*$,

$$\omega \equiv_A \omega' \quad \Rightarrow \quad \omega\alpha \equiv_A \omega'\alpha \tag{13}$$

PROVA: Se $\omega \equiv_A \omega'$ então $\forall \Delta \in \mathcal{F}_A$, $\omega \,|\!\vdash_A \Delta \;\Leftrightarrow\; \omega' \,|\!\vdash_A \Delta$. Tendo em conta a definição de $|\!\vdash_A$, isto significa que para todo o $\Delta \in \mathcal{F}_A$, $\exists \gamma \leq \omega : \vdash \gamma\Delta \;\Leftrightarrow\; \exists \gamma' \leq \omega' : \vdash \gamma'\Delta$. Como Δ é qualquer, podemos considerar Δ da forma $\alpha\Theta$, com $\Theta \in \mathcal{F}_A$, ficando então

$$\exists \gamma \leq \omega : \;\; \vdash \gamma(\alpha\Theta) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \gamma' \leq \omega' : \;\; \vdash \gamma'(\alpha\Theta)$$

Como $\Theta \in \mathcal{F}_A$ é qualquer, temos então que

$$\forall \Theta \in \mathcal{F}_A, \quad \omega\alpha \,|\!\vdash_A \Theta \;\Leftrightarrow\; \omega'\alpha \,|\!\vdash_A \Theta$$

E portanto, $\omega\alpha \equiv_A \omega'\alpha$.
□

Pode-se agora construir o conjunto quociente $\mathcal{C}^\infty / \equiv_A$ gerado por esta relação de equivalência. Os elementos de $\mathcal{C}^\infty / \equiv_A$ são, portanto, as classes de equivalência definidas pela relação $\equiv_A$.

Uma vez que $|X_A| = \mathcal{C}^\infty$ e a relação $\equiv_A$ é completamente determinada pela topologia $\Omega(X_A)$, o conjunto quociente $\mathcal{C}^\infty / \equiv_A$ poderá também ser representado por $|X_A|/\Omega(X_A)$.

A definição do conjunto quociente introduz uma função $\Pi : |X_A| \rightarrow |X_A|/\Omega(X_A)$ que a cada ponto de $|X_A|$ associa a classe de equivalência que o contém. Π tem o nome genérico de *projecção canónica* e é claramente sobrejectiva.

Vejamos agora em que circunstâncias Π gera uma função contínua. Para isso precisamos de definir uma topologia apropriada no espaço quociente.

Tomemos a família de conjuntos $\{U_O\}_{O\in\Omega(X_A)}$ definidos por

$$U_O \doteq \{\Pi(\omega) \mid \omega \in O\}$$

É fácil de verificar que a família $\{U_O\}_{O\in\Omega(X_A)}$ forma uma topologia. De facto,

- $\emptyset = U_\emptyset$
- $|X_A|/\Omega(X_A) = U_{\mathcal{C}^\infty}$
- $$\begin{array}{rcl} U_O \cap U_{O'} & = & \{\Pi(\omega) \mid \omega \in O\} \cap \{\Pi(\omega) \mid \omega \in O'\} \\ & = & \{\Pi(\omega) \mid \omega \in O \text{ e } \omega \in O'\} \\ & = & \{\Pi(\omega) \mid \omega \in O \cap O'\} \\ & = & U_{O\cap O'} \end{array}$$
  $O, O' \in \Omega(X_A) \Rightarrow O \cap O' \in \Omega(X_A)$, porque $\Omega(X_A)$ é uma topologia.
- $$\begin{array}{rcl} \bigcup_i U_{O_i} & = & \bigcup_i \{\Pi(\omega) \mid \omega \in O_i\} \\ & = & \{\Pi(\omega) \mid \omega \in \bigcup_i O_i\} \\ & = & U_{\bigcup_i O_i} \end{array}$$
  $\forall i,\ O_i \in \Omega(X_A) \Rightarrow \bigcup_i O_i \in \Omega(X_A)$, porque $\Omega(X_A)$ é uma topologia.

A esta topologia dá-se o nome de *topologia induzida* no espaço quociente e denota-se por $\Omega(|X_A|/\Omega(X_A))$.

Portanto, $\omega \in O \Rightarrow \Pi(\omega) \in U_O$ e a implicação inversa é também verdadeira, pois se $\Pi(\omega) \in U_O$ então $\exists \omega' \in O : \Pi(\omega) = \Pi(\omega')$, pelo que $\omega \equiv_A \omega'$. Como pela definição da equivalência $\omega \equiv_A \omega'$ sse $(\forall O \in \Omega(X_A),\ \omega \in O \Leftrightarrow \omega' \in O)$, temos que $\omega \in O$. Logo, teremos de ter $O = \Pi^{-1}(U_O)$.

Portanto, para as topologias $\Omega(X_A)$ e $\Omega(|X_A|/\Omega(X_A))$ a projecção canónica Π é uma função contínua.

Lema 6.1

A topologia $\Omega(X_A)$ é isomorfa à topologia por ela induzida no espaço quociente $|X_A|/\Omega(X_A)$. Isto é,

$$\Omega(X_A) \cong \Omega(|X_A|/\Omega(X_A))$$

PROVA: Considere-se a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Pi} & : & \Omega(X_A) \longrightarrow \Omega(|X_A|/\Omega(X_A)) \\ & & O \longmapsto U_O \end{array}$$

$\overline{\Pi}$ é obviamente sobrejectiva, pela própria definição de $\Omega(|X_A|/\Omega(X_A))$. Para todo o $O \in \Omega(X_A)$, verifica-se que $\Pi^{-1}(\overline{\Pi}(O)) = O$. Donde, se for $\overline{\Pi}(O) = \overline{\Pi}(O')$ teremos $\Pi^{-1}(\overline{\Pi}(O)) = \Pi^{-1}(\overline{\Pi}(O'))$; ou seja, $O = O'$. Portanto, $\overline{\Pi}$ também é injectiva. Consequentemente, a função $\overline{\Pi}$ estabelece um isomorfismo de locais.
$\square$

> Que relação existe entre estes dois espaços de estados e porquê a introdução deste espaço $|X_A|/\Omega(X_A)$?

Em primeiro lugar, notemos que "a topologia é a mesma" e "há menos pontos"; o morfismo Π preserva os abertos mas faz corresponder vários pontos de X_A num único ponto de $|X_A|/\Omega(X_A)$.

O que é que se ganhou ? Simplesmente o facto de o novo espaço ter passado a ser T_0, quando o espaço original não o era necessariamente. De facto, dadas duas classes de equivalência $u, v \in |X_A|/\Omega(X_A)$ distintas, temos sempre $\Pi(\omega) \neq \Pi(\omega')$ para todo o $\omega \in u$ e $\omega' \in v$. Donde, tem de existir um aberto O que não contém simultaneamente ω e ω'. Consequentemente, $\overline{\Pi}(O)$ não pode conter simultaneamente u e v, e portanto separa u de v. Logo, $\Omega(|X_A|/\Omega(X_A))$ é T_0. Aliás, isto vê-se muito facilmente dado que a relação de especialização desta topologia é, evidentemente, uma ordem parcial. A $|X_A|/\Omega(X_A)$ chama-se a *separação de* $|X_A|$.

Como vimos, a relação de equivalência $\equiv_A$ gerada pela topologia $\Omega(X_A)$ que caracteriza semanticamente um agente A, exprime o facto de duas sequências de eventos que se extendem, eventualmente, desde o passado mais remoto até ao presente, e que validam (no presente) exactamente as mesmas propriedades, serem equivalentes em termos de representarem uma "síntese" da influência dos eventos passados nos fenómenos futuros.

Atendendo à noção heurística de estado, todas as sequências de eventos relacionados entre si por $\equiv_A$ denotam o mesmo estado.

Uma vez que a relação de equivalência $\equiv_A$ foi gerada pela separação de $|X_A|$, podemos dizer que o acto de criar uma topologia que separe pontos segundo o axioma T_0 é equivalente à criação de um espaço de estados.

Baseados nesta construção, vamos então tentar definir um modelo de estados para um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$:

- Com base na relação de equivalência $\equiv_A$ que acabamos de definir, vamos definir o espaço de estados $\mathcal{K}_A$ como sendo o conjunto das classes de equivalência geradas por $\equiv_A$:

$$\mathcal{K}_A \doteq \mathcal{C}^\infty / \equiv_A$$

- Todas as propriedades de $\mathcal{F}_A$ são visíveis no modelo.
- A relação de validação define-se da seguinte forma: sendo $\omega \in \mathcal{C}^\infty$ e $\Delta \in \mathcal{F}_A$,

$$[\omega] \models_A \Delta \quad \text{sse} \quad \omega \,|\!\vdash_A \Delta$$

- Cada relação de transição da família $\delta_A \doteq \{\delta_a\}_{a \in \mathcal{C}}$ pode ser definida por:

$$([\omega], [\omega']) \in \delta_a \quad \text{sse} \quad [\omega'] = [\omega a]$$

Portanto, todas as transições são da forma

$$[\omega] \xrightarrow{a} [\omega a]$$

Note-se que o estado $[\omega a]$ é independente do ω escolhido como representante da classe $[\omega]$, dado que $\equiv_A$ verifica a propriedade (13).

Falta agora verificar se para $q, k \in \mathcal{K}_A$, $a \in \mathcal{C}$ e $\Delta \in \mathcal{F}_A$, a condição

$$\frac{q \models_A a\,\Delta \quad q \xrightarrow{a} k}{k \models_A \Delta}$$

é satisfeita.

Como todos os elementos das relações de transição de δ_A são da forma $[\omega] \xrightarrow{a} [\omega a]$ vamos considerar $q = [\omega]$ e $k = [\omega a]$, para $\omega \in \mathcal{C}^\infty$. Nestas condições temos que $[\omega] \models_A a\,\Delta$, o que significa que $\omega \mid\!\vdash_A a\,\Delta$. Mas então, $\omega a \mid\!\vdash_A \Delta$ e portanto $[\omega a] \models_A \Delta$. Ou seja, $k \models_A \Delta$. Portanto, $< \mathcal{K}_A, \mathcal{F}_A, \delta_A, \models_A >$ constitui um modelo de estados do agente A.

Além do mais, o modelo $< \mathcal{K}_A, \mathcal{F}_A, \delta_A, \models_A >$ satisfaz a condição

$$\frac{k \models_A \Delta \quad q \xrightarrow{a} k}{q \models_A a\,\Delta}$$

com $q, k \in \mathcal{K}_A$, $a \in \mathcal{C}$ e $\Delta \in \mathcal{F}_A$, que caracteriza os modelos determinísticos. Senão vejamos: pelos motivos já apresentados temos $q = [\omega]$ e $k = [\omega a]$, com $\omega \in \mathcal{C}^\infty$; $k \models_A \Delta$ fica então $[\omega a] \models_A \Delta$; ou seja, $\omega a \mid\!\vdash_A \Delta$, o que implica $\omega \mid\!\vdash_A a\,\Delta$ e logo $[\omega] \models_A a\,\Delta$. Portanto, $q \models_A a\,\Delta$.

Vamos então sumariar todo este estudo numa proposição.

Proposição 6.2

Dado um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$*, a estrutura*

$$< \mathcal{K}_A, \mathcal{F}_A, \delta_A, \models_A >$$

onde:

- $\mathcal{K}_A \doteq \mathcal{C}^\infty / \equiv_A$, *em que* $\equiv_A$ *é a relação de equivalência definida em* (12).
- $\mathcal{F}_A$ *é o conjunto das propriedades visíveis no modelo.*
- $\delta_A \doteq \{\delta_a\}_{a \in \mathcal{C}}$, *em que todos os elementos de cada relação* δ_a *são da forma*

$$[\omega] \xrightarrow{a} [\omega a] \quad , \quad \textit{com} \ \ \omega \in \mathcal{C}^\infty$$

- $\models_A$ *é a relação de validação definida por*

$$[\omega] \models_A \Delta \quad \textit{sse} \quad \omega \mid\!\vdash_A \Delta \quad , \quad \textit{com} \ \ \omega \in \mathcal{C}^\infty \ \textit{e} \ \ \Delta \in \mathcal{F}_A$$

constituí um modelo de estados determinístico para o agente A.

PROVA: Já apresentada acima.
□

O estado surge neste modelo como uma classe de equivalência do que pode ter acontecido no passado. Temos sequências de eventos que acontecem no passado que mais tarde fazem chegar às mesmas conclusões no presente.

Como sabemos, todo o aberto de $\Omega(X_A)$ é da forma $\bigcup_{\Delta\in\mu} O_\Delta$, com $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$. Por outro lado, já vimos que $U_{\bigcup_{\Delta\in\mu} O_\Delta} = \bigcup_{\Delta\in\mu} U_{O_\Delta}$. Portanto, os conjuntos da forma U_{O_Δ}, com $\Delta \in \mathcal{F}_A$, constituem uma base de $\Omega(|X_A|/\Omega(X_A))$. Para facilitar a notação vamos denotar estes conjuntos por O°_Δ; ou seja, sendo $\Delta \in \mathcal{F}_A$,

$$O^\circ_\Delta \doteq \{k \in \mathcal{K}_A \mid k \models_A \Delta\}$$

Também com o propósito de simplificar a notação passaremos a representar o espaço topológico $X_A/\Omega(X_A) \doteq < |X_A|/\Omega(X_A), \Omega(|X_A|/\Omega(X_A)) >$ por $X^\circ_A \doteq < |X^\circ_A|, \Omega(X^\circ_A) >$.

Portanto, todo o aberto de $\Omega(X^\circ_A)$ é da forma

$$\bigcup_{\Delta\in\mu} O^\circ_\Delta \quad , \quad \text{com} \ \ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A)$$

Tal como foi feito para os modelos de traços, também aqui podemos definir um homomorfismo de semi-reticulados entre as propriedades do agente e a topologia do espaço de estados.

Proposição 6.3

Dado um agente A, a função $\phi^\circ_A : \mathcal{F}_A \to \Omega(X^\circ_A)$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \phi^\circ_A & : & \mathcal{F}_A \longrightarrow \Omega(X^\circ_A) \\ & & \Delta \longmapsto \{k \in \mathcal{K}_A \mid k \models_A \Delta\} \end{array}$$

constitui um homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos.

PROVA : Trivial, dado que $\Omega(X^\circ_A) \cong \Omega(X_A)$.
□

A função ϕ°_A pode, evidentemente, ser extendida ao local $\mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$.

Proposição 6.4

Dado um agente A, a função $\Phi^\circ_A : \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \to \Omega(X^\circ_A)$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Phi^\circ_A & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \longrightarrow \Omega(X^\circ_A) \\ & & \downarrow(\mu) \longmapsto \bigcup_{\Delta\in\mu} \phi^\circ_A(\Delta) \quad , \quad com \ \ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_A) \end{array}$$

constituí um homomorfismo de locais.

PROVA: Trivial, dado que $\Omega(X^\circ_A) \cong \Omega(X_A)$.
□

O facto da função $\phi^\circ_A : \mathcal{F}_A \to \Omega(X^\circ_A)$ ser um homomorfismo de semi-reticulados acarreta implícitamente uma noção de correcção. ϕ°_A ao ser homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos, preserva o elemento máximo, conjunções, e a ordem.

Considerando agora a relação de validação do modelo, isto traduz-se na verificação das seguintes condições: sendo $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}_A$ e $k \in \mathcal{K}_A$,

(i) $\forall k \in \mathcal{K}_A, \quad k \models_A \emptyset$

(ii) $(k \models_A \Delta \ \text{ e } \ k \models_A \Delta') \quad \Rightarrow \quad k \models_A \Delta, \Delta'$

(iii) $\Delta \vdash \Delta' \quad \Rightarrow \quad \Delta \models_A \Delta'$

A condição (iii) corresponde à definição usual de correcção de um modelo de uma lógica. A condição (i) diz-nos que todo o estado valida o verdadeiro e, por outro lado, garante que a relação de validação não pode ser vazia. A condição (ii) diz-nos que se um estado validar duas propriedades, ele deve validar igualmente a sua conjunção.

Todas esta condições são condições que desejamos ter presentes nos modelos de estados e, por esse motivo, só nos vamos interessar por modelos de estados que satisfaçam estas condições.

Definição 6.4

Seja $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$ *um agente e* $m \doteq <\mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models>$ *um modelo de estados de* A*. O modelo* m *diz-se* **correcto** *se* $\mathcal{F}$ *é um sub-semi-reticulado de* $\mathcal{F}_A$ *que contém a propriedade* $\emptyset$*, a família de conjuntos* $Y \doteq \Big\{\{k \in \mathcal{K} \mid k \models \Delta\}\Big\}_{\Delta \in \mathcal{F}}$ *ordenada por inclusão constituí um semi-reticulado e a função*

$$\begin{aligned} \phi \quad : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow Y \\ & \Delta \longmapsto \{k \in \mathcal{K} \mid k \models \Delta\} \end{aligned} \tag{14}$$

for um homomorfismo de semi-reticulados. Ou, equivalentemente, se o modelo m *verifica as seguintes condições: sendo* $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$ *e* $k \in \mathcal{K}$*,*

(i) $\forall k \in \mathcal{K}, \quad k \models \emptyset$

(ii) $(k \models \Delta \ \ e \ \ k \models \Delta') \quad \Rightarrow \quad k \models \Delta, \Delta'$

(iii) $\Delta \vdash \Delta' \quad \Rightarrow \quad \Delta \models \Delta'$

□

Atendendo à definição de Y, é evidente que a função ϕ é sobrejectiva.

Lema 6.2

Dado um agente A*, o modelo de estados* $<\mathcal{K}_A, \mathcal{F}_A, \delta_A, \models_A>$ *é correcto.*

PROVA: Trivial.

□

Uma vez que se falou de correcção é natural também falar de completude. O conceito clássico de completude leva-nos a dizer que um modelo é completo quando verifica a condição

$$\Delta \models \Delta' \quad \Rightarrow \quad \Delta \vdash \Delta'$$

Olhando para a noção de correcção de um modelo de estados de um agente, podemos dizer que um modelo correcto $<\mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models>$ é completo se a função ϕ definida em (14) for injectiva. Isto é, ϕ é um isomorfismo de semi-reticulados.

De facto, sendo $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$,

$$\begin{array}{lll}\Delta \models \Delta' & \text{sse} & \forall k \in \mathcal{K}, \quad k \models \Delta \Rightarrow k \models \Delta' \\ & \text{sse} & \{k \mid k \models \Delta\} \subseteq \{k \mid k \models \Delta'\} \\ & \text{sse} & \phi(\Delta) \subseteq \phi(\Delta')\end{array}$$

Pelo que

$$\begin{array}{lllll}\phi(\Delta) = \phi(\Delta') & \Leftrightarrow & (\phi(\Delta) \subseteq \phi(\Delta') \text{ e } \phi(\Delta') \subseteq \phi(\Delta)) & \Leftrightarrow & \Delta \models \Delta' \text{ e } \Delta' \models \Delta \quad \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow & \Delta \vdash \Delta' \text{ e } \Delta' \vdash \Delta & \Leftrightarrow & \Delta \sim \Delta'\end{array}$$

Portanto, o modelo é completo se e só se ϕ é injectiva.

Definição 6.5

Seja A um agente e $m \doteq < \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ um modelo de estados correcto de A. O modelo m diz-se **completo** *quando a função ϕ definida em (14) é um isomorfismo de semi-reticulados. Ou, equivalentemente, se: sendo $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$,*

$$\Delta \models \Delta' \quad \Rightarrow \quad \Delta \vdash \Delta'$$

□

6.3 Conversão dos Modelos de Traços em Modelos de Estados

Para um agente, apresentamos dois tipos de modelos: os modelos de traços e os modelos de estados. Uma questão importante é a de saber como é possível passar de um tipo de modelo para outro.

Os modelos de traços representam o comportamento do agente e, de certo modo, a visão extrínseca do mesmo; representam o modo como o agente pode interactuar com os outros. O modelo de estados é a forma mais natural de representar computações; ou seja, as actividades intrínsecas do sistema. A passagem de um tipo de modelo para o outro é, portanto, fundamental.

Na secção anterior construímos um modelo de estados para um agente A com base na caracterização semântica dada pelo triplo $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$.

Esta construção sugere-nos o mesmo tipo de procedimento para gerarmos modelos de estados a partir de modelos de traços, pois $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ já é por si um modelo de traços, mais propriamente o modelo de traços inicial de A.

Portanto, tudo o que foi feito na secção anterior poderá ser aproveitado com os devidos cuidados, uma vez que um modelo de traços genérico $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ apenas se distingue de $< \mathcal{F}_A, X_A, \Phi_A >$ por ser mais restritivo.

Seja $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ um modelo de traços para um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$. Como vimos, a construção do espaço de estados vai ser gerada pela criação de uma topologia para $|X|$ que separa os pontos segundo o axioma T_0: a separação de $|X|$.

A pré-ordem de especialização gerada por $\Omega(X)$ em $|X|$ definida por: sendo $\omega, \omega' \in |X|$,

$$\omega \preceq \omega' \quad \text{sse} \quad (\forall O \in \Omega(X), \quad \omega \in O \Rightarrow \omega' \in O)$$

pode ser descrita, equivalentemente, por

$$\omega \preceq \omega' \quad \text{sse} \quad (\forall \Delta \in \mathcal{F}, \quad \omega \in \Phi_T(\Delta) \Rightarrow \omega' \in \Phi_T(\Delta))$$

pois os conjuntos $\Phi_T(\Delta)$, com $\Delta \in \mathcal{F}$, constituem uma base de $\Omega(X)$. Note-se que $\omega \in \Phi_T(\Delta)$ sse $\omega \| \!- \Delta$.

A relação de equivalência $\equiv$ em $|X|$ definida por

$$\omega \equiv \omega' \quad \text{sse} \quad (\omega \preceq \omega' \ \text{ e } \ \omega' \preceq \omega)$$

pode então ser descrita por

$$\omega \equiv \omega' \quad \text{sse} \quad (\forall \Delta \in \mathcal{F}, \quad \omega \in \Phi_T(\Delta) \Leftrightarrow \omega' \in \Phi_T(\Delta)) \tag{15}$$

Proposição 6.5

Seja $< \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ um modelo de traços para um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$. A relação de equivalência $\equiv$ descrita em (15) verifica a seguinte propriedade: sendo $\omega, \omega' \in |X|$, $a \in \mathcal{C}$ e $\omega\, a$, $\omega' a \in |X|$

$$\omega \equiv \omega' \quad \Rightarrow \quad \omega\, a \equiv \omega' a \tag{16}$$

PROVA: Se $\omega \equiv \omega'$, então $\forall \Delta \in \mathcal{F}, \ \omega \in \Phi_T(\Delta) \ \Leftrightarrow \ \omega' \in \Phi_T(\Delta)$ considerando Δ da forma $a\,\Theta$ temos então que $\omega \in \Phi_T(a\,\Theta) \ \Leftrightarrow \ \omega' \in \Phi_T(a\,\Theta)$. Pela condição (7) fica $\omega\, a \in \Phi_T(\Theta) \ \Leftrightarrow \ \omega'\, a \in \Phi_T(\Theta)$, com $\Theta \in \mathcal{F}$. Como Θ é qualquer, temos que $\omega\, a \equiv \omega'\, a$.
$\square$

Podemos já avançar com a conversão dos modelos de traços para modelos de estados.

Proposição 6.6

Dado um modelo de traços $m \doteq < \mathcal{F}, X, \Phi_T >$ para um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, podemos gerar um modelo de estados $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ para A a partir do modelo de traços m, da seguinte forma:

- $\mathcal{K} \doteq |X|/\equiv$, *sendo $\equiv$ a relação de equivalência definida em (15);*
- $\mathcal{F}$ *é o conjunto das propriedades visíveis no modelo;*
- $\delta \doteq \{\delta_a\}_{a \in \mathcal{C}}$, *em que todos os elementos de cada relação δ_a são da forma*

$$[\omega] \xrightarrow{a} [\omega\, a] \quad , \quad \textit{com} \ \ \omega\, a \in |X|$$

- $\models$ *é a relação de validação definida por*

$$[\omega] \models \Delta \quad \textit{sse} \quad \omega \in \Phi_T(\Delta) \ \ , \ \textit{com} \ \ \omega \in |X| \ \textit{e} \ \Delta \in \mathcal{F}$$

PROVA: As relações de transição δ_a estão bem definidas porque $\equiv$ satisfaz a condição (16). Falta ver que a condição

$$\frac{q \models a\,\Delta \quad q \xrightarrow{a} k}{k \models \Delta} \quad , \quad \text{com} \ \ q, k \in \mathcal{K},\ a \in \mathcal{C} \text{ e } \Delta, a\,\Delta \in \mathcal{F}$$

é satisfeita. Pela definição de δ_a podemos considerar $q = [\omega]$ e $k = [\omega\, a]$, com $\omega\, a \in |X|$. Note-se que $\omega\, a \in |X| \Rightarrow \omega \in |X|$. Portanto, temos que $[\omega] \models a\,\Delta$, o que significa que $\omega \in \Phi_T(a\,\Delta)$. Como $[\omega] \xrightarrow{a} [\omega\, a]$ é porque $\omega\, a \in |X|$, então pela condição (7) $\omega\, a \in \Phi_T(\Delta)$, o que significa que $[\omega\, a] \models \Delta$.

Portanto, o triplo $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ constituí um modelo de estados para o agente A.
$\square$

Como sabemos, a topologia $\Omega(X)$ é isomorfa à topologia induzida no espaço quociente. Vamos denotar este espaço topológico por $X^\circ \doteq < |X^\circ|, \Omega(X^\circ) >$. $|X^\circ| = \mathcal{K}$ e todo o aberto de $\Omega(X^\circ)$ é da forma

$$\bigcup_{\Delta \in \mu} O^{\circ}_{\Delta} \quad , \text{ com } \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$$

sendo $O^{\circ}_{\Delta} \doteq \{k \in \mathcal{K} \mid k \models \Delta\}$.

Proposição 6.7
Dado um agente A, a função $\phi^{\circ}_T : \mathcal{F} \to \Omega(X^{\circ})$ definida por

$$\begin{aligned} \phi^{\circ}_T \quad : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow \Omega(X^{\circ}) \\ & \Delta \longmapsto \{k \in \mathcal{K} \mid k \models \Delta\} \end{aligned}$$

constitui um homomorfismo de semi-reticulados conjuntivos.

PROVA : Trivial, dado que $\Omega(X^{\circ}) \cong \Omega(X)$.
□

Esta proposição indica-nos que os modelos de estados que resultam da conversão de algum modelo de traços são correctos. Aliás, outra coisa não seria de esperar dado que todos os modelos de traços são correctos por definição.

Proposição 6.8
Dado um agente A, a função $\Phi^{\circ}_T : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \Omega(X^{\circ})$ definida por

$$\begin{aligned} \Phi^{\circ}_T \quad : \quad & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega(X^{\circ}) \\ & \downarrow(\mu) \longmapsto \bigcup_{\Delta \in \mu} \phi^{\circ}_T(\Delta) \quad , \quad \textit{com} \quad \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

constituí um homomorfismo de locais.

PROVA: Trivial, dado que $\Omega(X^{\circ}) \cong \Omega(X)$.
□

Para além dos modelos de estados que resultam da conversão de modelos de traços podem existir outros modelos de estados correctos que não aqueles, como é evidente.

Para um modelo de estados correcto $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models>$ podemos tomar a família $Y \doteq \{\{k \in \mathcal{K} \mid k \models \Delta\}\}_{\Delta \in \mathcal{F}}$ como base de uma topologia $\Omega(\mathcal{K})$. É claro que extendendo o homomorfismo de semi-reticulados $\phi : \mathcal{F} \to Y$ para o domínio $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ da maneira usual

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Omega(\mathcal{K}) \\ & \downarrow(\mu) \longmapsto \bigcup_{\Delta \in \mu} \{k \in \mathcal{K} \mid k \models \Delta\} \quad , \quad \text{com} \quad \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

temos em Φ um homomorfismo de locais.

No entanto, a topologia $\Omega(\mathcal{K})$ pode não ser T_0; ou seja, o espaço de estados $\mathcal{K}$ pode ter estados diferentes que validam exactamente as mesmas propriedades. Esta situação acontece quando temos estados "a mais". Contudo, os modelos não deixam de ser correctos só que "pecam por excesso".

Por tudo que aqui se disse, e olhando para o teorema 5.1, podemos construir para os modelos de estados que resultam da conversão de modelos de traços um diagrama equivalente.

Teorema 6.1
Seja A um agente, e $< \mathcal{K}_A, \mathcal{F}_A, \delta_A, \models_A>$ e $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models>$ modelos de estados que resultam da conversão dos modelos de traços m_A e m, respectivamente, sendo m_A o modelo de traços inicial de A.

Sendo $i : \mathcal{L}(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}_A)$ o morfismo de inclusão da lógica gerada por $\mathcal{F}$ na lógica gerada por $\mathcal{F}_A$ (gerado pela inclusão de $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}_A$), existe um único homomorfismo de locais $\xi : \Omega(X^\circ) \to \Omega(X_A^\circ)$ que faz comutar o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathcal{F}_A) \arrow[d, "\Phi_A^\circ"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\Phi_T^\circ"] \\
\Omega(X_A^\circ) & \Omega(X^\circ) \arrow[l, "\xi"]
\end{tikzcd}$$

PROVA: Trivial, dado que $\Omega(X_A^\circ) \cong \Omega(X_A)$ e $\Omega(X^\circ) \cong \Omega(X)$.
□

6.4 Categoria de Modelos de Estados Correctos

De entre todos os modelos de estados que é possível definir para um agente A apenas nos interessam os modelos de estado correctos.

À semelhança do que aconteceu para os modelos de traços, vamos aqui fazer a construção de uma categoria para os modelos de estados correctos de um agente.

Definição 6.6

Dado um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ e dois modelos de estados de A, $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ e $< \mathcal{K}', \mathcal{F}', \delta', \models' >$, um **morfismo de modelos de estados correctos**

$$\rho : < \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models > \longrightarrow < \mathcal{K}', \mathcal{F}', \delta', \models' >$$

é um par de homomorfismos $< i, \rho_\Omega >$, em que

(i) i é a inclusão de $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$ em $\mathcal{L}(\mathcal{F})$

$$i \ : \ \mathcal{L}(\mathcal{F}') \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F})$$

(ii) ρ_Ω é um homomorfismo de locais entre as topologias $\Omega(\mathcal{K}')$ e $\Omega(\mathcal{K})$

$$\rho_\Omega \ : \ \Omega(\mathcal{K}') \longrightarrow \Omega(\mathcal{K})$$

de tal modo que o seguinte diagrama em **Loc**

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[r, "i"] & \mathcal{L}(\mathcal{F}') \\
\Omega(\mathcal{K}) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\rho_\Omega"'] & \Omega(\mathcal{K}') \arrow[u, "\Phi'"']
\end{tikzcd} \qquad (17)$$

comuta.

□

Vejamos então se com esta definição de morfismo estamos em condições de definir uma categoria de modelos de estados correctos para um agente:

- Sendo $\rho : <\mathcal{K},\mathcal{F},\delta,\models> \rightarrow <\mathcal{K}',\mathcal{F}',\delta',\models'>$ e $\rho' : <\mathcal{K}',\mathcal{F}',\delta',\models'> \rightarrow <\mathcal{K}'',\mathcal{F}'',\delta'',\models''>$ morfismos de modelos de estados correctos, com $\rho \doteq< i,\rho_\Omega >$ e $\rho' \doteq< i',\rho'_\Omega >$, a composição destes dois morfismos é o morfismo $\rho' \circ \rho : <\mathcal{K},\mathcal{F},\delta,\models> \rightarrow <\mathcal{K}'',\mathcal{F}'',\delta'',\models''>$ que se define como sendo o par de homomorfismos de locais $< i \circ i', \rho_\Omega \circ \rho'_\Omega >$.

  Dado que estamos a trabalhar com os homomorfismos que definem os morfismos na categoria **Loc** que fazem comutar o diagrama (17), é evidente que o diagrama em **Loc**

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[r, "i' \circ i"] & \mathcal{L}(\mathcal{F}'') \\
\Omega(\mathcal{K}) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\rho'_\Omega \circ \rho_\Omega"'] & \Omega(\mathcal{K}'') \arrow[u, "\Phi''"']
\end{tikzcd}$$

  comuta.

  Por outro lado, é também evidente que a composição de morfismos é associativa.

- Para todo o modelo de estados correcto $<\mathcal{K},\mathcal{F},\delta,\models>$ está definido o morfismo identidade que corresponde ao par $< id_\mathcal{L}, id_\Omega >$ em que $id_\mathcal{L}$ é a identidade em $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ e id_Ω a identidade em $\Omega(\mathcal{K})$.

Estamos pois em condições de definir a categoria dos modelos de estados correctos de um agente.

Definição 6.7
ModE$_A$ *é a categoria que tem por objectos os modelos de estados correctos do agente A, e cujos morfismos são os morfismos de modelos de estados correctos de A, apresentados na definição 6.6.*
□

Para cada agente $A \doteq< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, a definição da categoria de modelos de traços de A, **ModT**$_A$ (apresentada na secção 5.2), a definição da categoria **ModE**$_A$ que acabamos de apresentar, e a construção de modelos de estados a partir de modelos de traços, conduz-nos naturalmente à definição de um functor

$$\mathrm{F} : \mathbf{ModT}_A \longrightarrow \mathbf{ModE}_A$$

F converte todo o modelo de traços $<\mathcal{F}, X, \Phi_T>$ no modelo de estados $<\mathcal{K},\mathcal{F},\delta,\models>$ de acordo com o apresentado na proposição 6.6. Já sabemos que este modelo de estados é correcto. Todo o morfismo $\eta \doteq< \eta_\mathcal{L}, \eta_\Omega >$ de modelos de traços

$$\eta : <\mathcal{F}, X, \Phi_T> \longrightarrow <\mathcal{F}', X', \Phi'_T>$$

é convertido no morfismo $\rho \doteq< \rho_\mathcal{L}, \rho_\Omega >$ de modelos de estados correctos

$$\rho : <\mathcal{K},\mathcal{F},\delta,\models> \longrightarrow <\mathcal{K}',\mathcal{F}',\delta',\models'>$$

com $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models> = \mathrm{F}(< \mathcal{F}, X, \Phi_T >)$ e $< \mathcal{K}', \mathcal{F}', \delta', \models'> = \mathrm{F}(< \mathcal{F}', X', \Phi'_T >)$.

$\rho_{\mathcal{L}} = \eta_{\mathcal{L}}$ e, como $\Omega(X) \cong \Omega(X^\circ)$, ρ_Ω é o homomorfismo de locais que a cada objecto $\overline{\Pi}'(O')$ faz corresponder $\overline{\Pi}(\eta_\Omega(O'))$; considerando $\overline{\Pi} : \Omega(X) \to \Omega(X^\circ)$ e $\overline{\Pi}' : \Omega(X') \to \Omega(X'^\circ)$ os isomorfismos de abertos gerados pelas projecções canónicas $\Pi : |X| \to |X^\circ|$ e $\Pi' : |X'| \to |X'^\circ|$, respectivamente.

É evidente que para todo o modelo de traços de A, m, $\mathrm{F}(id_m) = id_{F(m)}$ e que $\mathrm{F}(\eta \circ \eta') = \mathrm{F}(\eta) \circ \mathrm{F}(\eta')$, com $\eta, \eta' \in mor(\mathbf{ModT}_A)$.

A imagem de $\mathbf{ModT}_A$ por F, $\mathrm{F}(\mathbf{ModT}_A)$, constitui uma subcategoria de $\mathbf{ModE}_A$: a categoria dos modelos de estados correctos de A que resultam da conversão de algum modelo de traços de A, e que denotaremos por $\mathbf{ModET}_A$.

Pelo teorema 6.1, é óbvio que o modelo de estados $< \mathcal{K}_A, \mathcal{F}_A, \delta_A, \models_A>$ é o objecto inicial da categoria $\mathbf{ModET}_A$.

6.5 Modelos Coerentes

As construções apresentadas em secções anteriores, indicam-nos que os modelos de traços estão de algum modo "embebidos" nos modelos de estados. Sabemos que todos os modelos de estados que resultam da conversão de modelos de traços, são correctos e são T_0. Vamos então aprofundar um pouco mais o estudo deste tipo ou modelos. Portanto nesta secção vamos trabalhar no contexto da categoria $\mathbf{ModET}_A$. Todos os modelos de estados aqui referidos serão objectos desta categoria, a menos que expressamente seja dito algo em contrário.

Num modelo de estados $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models>$ de um agente A, a relação de validação $\models$ desempenha um papel muito importante, pois faz a ligação entre a lógica do agente e os seus modelos topológicos. De facto, os conjuntos $O^\circ_\Delta \doteq \{k \in \mathcal{K} \mid k \models \Delta\}$ gerados por $\models$ constituem uma base da topologia $\Omega(X^\circ)$. Relembre que $X^\circ \doteq < |X^\circ|, \Omega(X^\circ) >$, com $|X^\circ| = \mathcal{K}$, e todo o aberto de $\Omega(X^\circ)$ é da forma $\bigcup_{\Delta \in \mu} O^\circ_\Delta$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$.

No entanto, podemos ver a relação $\models$ noutra prespectiva: em vez de olharmos para o conjunto de estados que validam uma dada propriedade Δ, podemos fixar um estado k e determinar o conjunto de propriedades Δ que k valida. Ou seja, conjuntos da forma

$$\{\Delta \in \mathcal{F} \mid k \models \Delta\} \quad , \text{ com } \ k \in \mathcal{K}$$

A partir de $\mathcal{F}$ geramos a lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, por isso vamos fixar um estado $k \in \mathcal{K}$ e determinar o conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ que k valida.

Como os elementos da lógica $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ são da forma $\downarrow(\mu)$, com $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$, e representam a disjunção das propriedades de μ, esses conjuntos podem ser descritos do seguinte modo

$$\mu_k \doteq \{\downarrow(\mu) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \mid \exists \Delta \in \mu \ : \ k \models \Delta\}$$

ou seja, μ_k é tal que $\downarrow(\mu) \in \mu_k$ sse $\exists \Delta \in \mu \ : \ k \models \Delta$. A definição destes conjuntos μ_k diz-nos, portanto, que um estado k valida uma disjunção de propriedades quando k valida pelo menos uma das propriedades presentes na disjunção.

Proposição 6.9

Seja A um agente e $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models>$ um modelo de estados correcto de A. Os conjuntos μ_k, com $k \in \mathcal{K}$, da forma

$$\mu_k \doteq \{\downarrow(\mu) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \mid \exists \Delta \in \mu \,:\, k \models \Delta\}$$

são filtros completamente primos do local $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

PROVA: Antes de mais convém lembrar que, sendo $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$,

$$\downarrow(\mu) = \{\Gamma \in \mathcal{F} \mid \exists \Delta \in \mu \,:\, \Gamma \vdash \Delta\}$$

Vejamos então que cada conjunto μ_k constitui um filtro completamente primo de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$:

- $$\downarrow(\mu) \in \mu_k \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \in \mu \,:\, k \models \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \in \mu\, \forall \Theta \geq \Delta, \;\; k \models \Theta \tag{18}$$

  Por outro lado,

  $$\begin{aligned} \uparrow(\downarrow(\mu)) &= \{\downarrow(\nu) \mid \downarrow(\mu) \subseteq \downarrow(\nu)\} \\ &= \{\downarrow(\nu) \mid \forall \Delta \in \mu\, \exists \Theta \in \nu \,:\, \Delta \vdash \Theta\} \end{aligned}$$

  Daí que,

  $$\begin{aligned} \downarrow(\nu) \in \uparrow(\downarrow(\mu)) &\Rightarrow \forall \Delta \in \mu\, \exists \Theta \in \nu \,:\, \Delta \vdash \Theta \;\; \overset{(18)}{\Rightarrow} \;\; \exists \Theta \in \nu \,:\, k \models \Theta \\ &\Rightarrow \downarrow(\nu) \in \mu_k \end{aligned}$$

  Portanto, $\downarrow(\mu) \in \mu_k \Rightarrow \uparrow(\downarrow(\mu)) \subseteq \mu_k$.

- $\mathcal{F} \in \mu_k$, pois $\mathcal{F} = \downarrow(\{\emptyset\})$ e $\forall k \in \mathcal{K}$, $k \models \emptyset$, visto que o modelo é correcto.

- $\downarrow(\mu), \downarrow(\nu) \in \mu_k \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \in \mu \,:\, k \models \Delta$ e $\exists \Delta' \in \nu \,:\, k \models \Delta' \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \in \mu, \Delta' \in \nu \,:\, k \models \Delta \wedge \Delta'$.

  Por outro lado, $\downarrow(\mu) \cap \downarrow(\nu) = \downarrow(\{\Delta \wedge \Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \nu\})$. Portanto, $\downarrow(\mu) \cap \downarrow(\nu) \in \mu_k$.

- $\emptyset = \downarrow(\{\})$, pelo que $\emptyset \notin \mu_k$.

- $\downarrow(\mu) \cup \downarrow(\nu) \in \mu_k \quad \Rightarrow \quad \downarrow(\mu \cup \nu) \in \mu_k \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \in \mu \cup \nu \,:\, k \models \Delta \quad \Rightarrow \quad (\exists \Delta \in \mu \,:\, k \models \Delta)$ ou $(\exists \Delta \in \nu \,:\, k \models \Delta) \quad \Rightarrow \quad \downarrow(\mu) \in \mu_k$ ou $\downarrow(\nu) \in \mu_k$

- $\bigcup_i \downarrow(\mu_i) \in \mu_k \quad \Rightarrow \quad \downarrow(\bigcup_i \mu_i) \in \mu_k \quad \Rightarrow \quad \exists \Delta \in \bigcup_i \mu_i \,:\, k \models \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \mu_i \,:\, \Delta \in \mu_i$ e $k \models \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists \downarrow(\mu_i) \,:\, \downarrow(\mu_i) \in \mu_k$

Acabamos de provar que todo o conjunto μ_k é um filtro completamente primo de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.
□

Dado um local qualquer L, o conjunto dos pontos de L, $pt(L)$ pode ser identificado com o conjunto de todos os filtros completamente primos de L e, como se sabe, a família de conjuntos $\{U_a\}_{a \in L}$, com $U_a \doteq \{F \in pt(L) \mid a \in F\}$, forma uma topologia de $pt(L)$.

Portanto, todo o conjunto μ_k, $k \in \mathcal{K}$, é um elemento de $|pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}))|$. Cada $k \in \mathcal{K}$ determina, deste modo um elemento de $|pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}))|$.

Podemos caracterizar este facto por uma função $\overline{\Phi^\circ}$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi^\circ} \;:\; |X^\circ| &\longrightarrow |pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}))| \\ k &\longmapsto \mu_k \end{aligned}$$

A função $\overline{\Phi^\circ}$ é injectiva. De facto, atendendo à definição de μ_k e considerando $k = [\omega]$ e $k' = [\omega']$, pode-se ver que

$$\begin{array}{rcl} \mu_k = \mu_{k'} & \Leftrightarrow & \forall \Delta \in \mathcal{F},\; k \models \Delta \;\;\text{sse}\;\; k' \models \Delta \\ & \Leftrightarrow & \forall \Delta \in \mathcal{F},\; [\omega] \models \Delta \;\;\text{sse}\;\; [\omega'] \models \Delta \\ & \Leftrightarrow & \forall \Delta \in \mathcal{F},\; \omega \| \!-\Delta \;\;\text{sse}\;\; \omega' \| \!-\Delta \\ & \Leftrightarrow & \omega \equiv \omega' \\ & \Leftrightarrow & k = k' \end{array}$$

Os abertos da topologia $\Omega(pt(\mathcal{L}(\mathcal{F})))$ são os conjuntos da forma

$$Q_{\downarrow(\mu)} \doteq \{v \in pt(\mathcal{L}(\mathcal{F})) \mid \downarrow(\mu) \in v\} \quad , \quad \text{com} \;\; \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$$

Isto permite definir a seguinte função:

$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \longrightarrow & \Omega(pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}))) \\ & & \downarrow(\mu) \longmapsto & Q_{\downarrow(\mu)} \end{array}$$

que constituí um homomorfismo de locais. Adicionalmente, como todo o aberto de $\Omega(pt(\mathcal{L}(\mathcal{F})))$ é gerado por algum elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, a função ε é necessariamente sobrejectiva. Poderá no entanto ser ou não ser injectiva; se for injectiva, isso significa que duas fórmulas distintas de $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, $\downarrow(\mu)$ e $\downarrow(v)$, dão sempre origem a conjuntos de pontos $Q_{\downarrow(\mu)}$ e $Q_{\downarrow(v)}$ distintos, ou seja, existe sempre um ponto onde uma das fórmulas é válida e a outra não. Nestas condições o local $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ diz-se *espacial*. Mas à partida nada nos garante que ε seja injectiva.

A função inversa $\overline{\Phi^\circ}^{-1}$ verifica, para cada $Q_{\downarrow(\mu)} \in \Omega(pt(\mathcal{L}(\mathcal{F})))$,

$$k \in \overline{\Phi^\circ}^{-1}(Q_{\downarrow(\mu)}) \quad \text{sse} \quad \overline{\Phi^\circ}(k) \in Q_{\downarrow(\mu)}$$

Temos portanto, $\overline{\Phi^\circ}(k) \in Q_{\downarrow(\mu)}$ sse $\downarrow(\mu) \in \overline{\Phi^\circ}(k)$. Logo, $k \in \overline{\Phi^\circ}^{-1}(Q_{\downarrow(\mu)})$ sse $\downarrow(\mu) \in \overline{\Phi^\circ}(k)$ sse $\exists \Delta \in \mu \,:\, k \models \Delta$ sse $k \in \bigcup_{\Delta \in \mu} O^\circ_\Delta$. Ou seja,

$$\overline{\Phi^\circ}^{-1}(Q_{\downarrow(\mu)}) = \textstyle\bigcup_{\Delta \in \mu} O^\circ_\Delta \;=\; \Phi^\circ(\downarrow(\mu))$$

Considerando os homomorfismos de locais, esta relação traduz-se na comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Phi^\circ"'] & \Omega(pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}))) \arrow[d, "\overline{\Phi^\circ}^{-1}"] \\ & \Omega(X^\circ) \end{tikzcd}$$

Denotando por $\Omega(\overline{\Phi^\circ})$ o morfismo em **Loc** gerado pelo homomorfismo $\overline{\Phi^\circ}^{-1}$ e mantendo o mesmo nome para os outros morfismos, podemos então escrever o diagrama equivalente em **Loc**

$$\begin{tikzcd} & \Omega(X^\circ) \arrow[dl, "\Omega(\overline{\Phi^\circ})"'] \arrow[d, "\Phi^\circ"] \\ \Omega(pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}))) \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X^\circ \arrow[d, "\overline{\Phi^\circ}"] \\ pt(\mathcal{L}(\mathcal{F})) \end{tikzcd}$$

Considerando a adjunção $\Omega \dashv pt$

$$\overline{\Phi^\circ} \;:\; X^\circ \longrightarrow pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}))$$

define um morfismo nos espaços topológicos que dá origem à comutatividade do diagrama. O morfismo ε é a co-unidade desta adjunção.

Sejam $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ e $< \mathcal{K}', \mathcal{F}', \delta', \models' >$ dois modelos de estados de $\mathbf{ModET}_A$. Um morfismo $\rho \,:\, < \mathcal{K}', \mathcal{F}', \delta', \models' > \longrightarrow < \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ é um par de homomorfismos de locais $< i, \rho_\Omega >$, sendo i uma inclusão, que fazem comutar o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(\mathcal{F}') \arrow[d, "\Phi^{\circ\prime}"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\Phi^\circ"] \\ \Omega(X^{\circ\prime}) & \Omega(X^\circ) \arrow[l, "\rho_\Omega"] \end{tikzcd}$$

Os morfismos entre modelos são essencialmente caracterizados pelos homomorfismos entre as suas topologias. Uma questão pode então ser colocada:

> Em que circunstâncias um homomorfismo entre as topologias dos dois modelos, pode determinar uma função contínua entre os espaços de estados dos dois modelos ?

Pela adjunção $\Omega \dashv pt$ e considerando o homomorfismo ρ_Ω sabemos que ρ_Ω determina unívocamente uma função contínua entre os espaços topológicos $X^{\circ\prime}$ e X° quando o espaço X° é sóbrio, pois nesse caso $pt(\Omega(X^\circ)) \cong X^\circ$.

$$\begin{tikzcd} \Omega(X^\circ) \arrow[d, "\rho_\Omega"'] \\ \Omega(X^{\circ\prime}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} pt(\Omega(X^\circ)) \cong X^\circ \\ X^{\circ\prime} \arrow[u, "\overline{\rho_\Omega}"'] \end{tikzcd}$$

Vejamos em que condições o espaço X° é sóbrio.

Dado o local de abertos $\Omega(X^\circ)$, os seus pontos $p \in pt(\Omega(X^\circ))$ são as entidades que é possível separar com esses abertos. Sendo $p, p' \in pt(\Omega(X^\circ))$,

$$p \neq p' \quad \text{sse} \quad \exists O^\circ \in \Omega(X^\circ) \ : \ (O^\circ \in p \ \text{ e } \ O^\circ \notin p') \ \text{ ou } \ (O^\circ \notin p \ \text{ e } \ O^\circ \in p')$$

Os pontos do espaço X° têm de estar inseridos em $pt(\Omega(X^\circ))$ porque os abertos de X° separam estes pontos.

A visão dos elementos de X° como pontos de $\Omega(X^\circ)$ pode ser feita através do morfismo

$$\begin{array}{rcl} \eta & : & X^\circ \longrightarrow pt(\Omega(X^\circ)) \\ & & k \longmapsto \{O^\circ \in \Omega(X^\circ) \mid k \in O^\circ\} \end{array}$$

definida como a unidade da adjunção $\Omega \dashv pt$. Se o espaço X° for sóbrio, η deverá ser uma bijecção.

- Será η injectiva ?

  η é injectiva sse $k \neq k' \ \Rightarrow \ \exists O^\circ \in \Omega(X^\circ) \ : \ (k \in O^\circ \ \text{ e } \ k' \notin O^\circ) \ \text{ ou } \ (k \notin O^\circ \ \text{ e } \ k' \in O^\circ)$ o que é equivalente a dizer que X° é T_0.

  Como por construção X° é T_0, podemos garantir que η é sempre injectiva.

- Será η sobrejectiva ?

  Se o for, isso significa que toda a entidade separável pelos abertos de $\Omega(X^\circ)$ não é mais do que um elemento de $|X^\circ|$. Ou seja, $\Omega(X^\circ)$ não separa mais pontos do que os elementos de $|X^\circ|$.

Portanto, à partida sabemos que η é injectiva mas quanto à sobrejectividade ainda não nos podemos pronunciar.

Na hipótese de η ser sobrejectiva, e de portanto o espaço X° ser sóbrio, podemos já adiantar algumas consequências.

Se o espaço X° for sóbrio e dado que a topologia $\Omega(X^\circ)$ é isomorfa à topologia $\Omega(X)$, verifica-se que

$$\begin{tikzcd} \Omega(X^\circ) \arrow[d, "\overline{\Pi}"'] & X^\circ \cong pt(\Omega(X^\circ)) \cong pt(\Omega(X)) \\ \Omega(X) & X \arrow[u, "\Pi"'] \end{tikzcd}$$

Note-se que, apesar de tudo, o espaço X pode não ser sóbrio pois não há garantias de que ele seja T_0, no entanto X° é, como já vimos, T_0.

O espaço X° é sóbrio se coincidir com a sobrificação do espaço X. Um espaço de traços interessante é então aquele em que a geração do espaço de estados coincide com a sua sobrificação.

$$\begin{tikzcd}
\Omega(X^\circ) \arrow[d, "id"'] & pt(\Omega(X^\circ)) \\
\Omega(X^\circ) \arrow[d, "\overline{\Pi}"'] & X^\circ \arrow[u, "\overline{id} = \eta"'] \\
\Omega(X) & X \arrow[u, "\Pi"']
\end{tikzcd}$$

A projecção canónica $\Pi : X \to X^\circ$ é sobrejectiva. Quanto ao morfismo η ele é, como se sabe, bijectivo dado que X° é um espaço sóbrio.

Tendo em conta a adjunção $\Omega \dashv pt$ e sendo X° um espaço sóbrio, podemos construir o seguinte diagrama (note-se que estamos a considerar os homomorfismos de locais):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[d, "\Phi^\circ"'] & pt(\mathcal{L}(\mathcal{F})) \\
\Omega(X^\circ) \arrow[d, "\overline{\Pi}"'] & X^\circ \cong pt(\Omega(X^\circ)) \arrow[u, "\overline{\Phi^\circ}"'] \\
\Omega(X) & X \arrow[u, "\Pi"']
\end{tikzcd}$$

Partindo do diagrama comutativo de homomorfismos de locais

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(\mathcal{F}) \arrow[d, "\Phi^\circ"'] & \mathcal{L}(\mathcal{F}') \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\Phi^{\circ\prime}"] \\
\Omega(X^\circ) & \Omega(X^{\circ\prime}) \arrow[l, "\xi"]
\end{tikzcd}$$

podemos agora, com base na adjunção $\Omega \dashv pt$ e no caso do espaço X° ser sóbrio, construir o seguinte diagrama comutativo nos espaços topológicos

$$
\begin{tikzcd}
pt(\mathcal{L}(\mathcal{F})) \arrow[r, "\overline{i}"] & pt(\mathcal{L}(\mathcal{F}')) \\
X^\circ \arrow[u, "\overline{\Phi^\circ}"] \arrow[r, "\overline{\xi}"'] & X^{\circ\prime} \arrow[u, "\overline{\Phi^{\circ\prime}}"']
\end{tikzcd}
\tag{19}
$$

ou seja, para todo o $k \in |X^\circ|$,

$$\overline{i}(\overline{\Phi^\circ}(k)) = \overline{\Phi^{\circ\prime}}(\overline{\xi}(k))$$

o que é equivalente a dizer que

$$\overline{i}(\{\downarrow(\mu) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \mid \exists\Delta \in \mu \,:\, k \models \Delta\}) = \{\downarrow(\mu') \in \mathcal{L}(\mathcal{F}') \mid \exists\Delta' \in \mu' \,:\, \overline{\xi}(k) \models' \Delta'\}$$

Pelo que,

$$\{\downarrow(\mu) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}) \mid \exists i(\Delta') \in \mu \,:\, k \models i(\Delta')\} = \{\downarrow(\mu') \in \mathcal{L}(\mathcal{F}') \mid \exists\Delta' \in \mu' \,:\, \overline{\xi}(k) \models' \Delta'\}$$

Portanto,

$$\exists i(\Delta') \in \mu \,:\, k \models i(\Delta') \quad \text{sse} \quad \exists\Delta' \in \mu' \,:\, \overline{\xi}(k) \models' \Delta'$$

Em particular, considerando as fórmulas $\downarrow(\Delta')$ de $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$, esta igualdade diz-nos que

$$k \models i(\Delta') \quad \text{sse} \quad \overline{\xi}(k) \models' \Delta'$$

Portanto, a existência de morfismos entre modelos de estados sóbrios corresponde à existência de uma função contínua entre espaços de estados que faz comutar o diagrama (19) e que portanto verifica

$$k \models \Delta' \quad \text{sse} \quad \overline{\xi}(k) \models' \Delta'$$

A sobriedade dos modelos de estados é uma propriedade importante e desejável. Quando assim acontece, a existência de um morfismo entre dois modelos de estados de um agente $\rho : <\mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models> \longrightarrow <\mathcal{K}', \mathcal{F}', \delta', \models'>$ define uma função contínua entre os espaços de estados $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}'$, que a cada estado k de $\mathcal{K}$ faz corresponder um estado k' de $\mathcal{K}'$ que valida todas as propriedades que k valida podendo eventualmente validar mais propriedades.

Todas estas construções foram feitas sob a hipótese do espaço de estados ser sóbrio, mas à partida não há garantias de que qualquer modelo de estados de $\mathbf{ModET}_A$, para um agente A, seja sóbrio. Não sabemos mesmo se qualquer tipo de agente tem potencialidades de ter modelos de estado sóbrios ou se é necessário que os agentes obedeçam a certas condições para que se consigam definir modelos sóbrios para esses agentes. Este é decididamente um ponto a explorar.

Um conceito mais forte do que espaço sóbrio é o de espaço coerente[4]. O nosso interesse pela coerência do espaço X° vem, em parte, da esperança de que a coerência do local $\Omega(X^\circ)$ possa ter uma influência decisiva na sobriedade de X°.

[4] Um espaço X é coerente se é sóbrio e o local $\Omega(X)$ é coerente.

Que poderemos dizer acerca da coerência do local $\Omega(X^\circ)$?

Uma vez que $\Omega(X^\circ) \cong \Omega(X)$ vamos antes analisar a coerência do local $\Omega(X)$ por ser mais cómodo de manipular. O local $\Omega(X)$ é coerente se:

(i) todo o aberto de $\Omega(X)$ poder ser expresso por uma disjunção de elementos finitos;

(ii) $K(\Omega(X))$ for um sub-reticulado distributivo de $\Omega(X)$.

A condição (i) é satisfeita se $\Omega(X)$ tiver uma base de compactos.

Para ajudar na investigação deste aspecto vamos apresentar algumas definições e resultados.

Definição 6.8

Dado um espaço topológico X definido por um modelo de traços $< \mathcal{F}, X, \Phi >$ para um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, seja $\preceq$ a pré-ordem de especialização gerada por $\Omega(X)$ em $|X|$. Define-se, para $\alpha \in |X|$,

$$\Uparrow(\alpha) \doteq \bigcup_{\alpha \preceq \beta,\, \beta \in K(|X|)} \uparrow(\beta)$$

$$\lceil \alpha \rceil \doteq \{\omega \in |X| \mid \alpha \preceq \omega\}$$

□

Note-se que

$$\begin{aligned}
\lceil \alpha \rceil &\doteq \{\omega \in |X| \mid \alpha \preceq \omega\} \\
&= \{\omega \in |X| \mid \forall O \in \Omega(X),\, \alpha \in O \Rightarrow \omega \in O\} \\
&= \{\omega \in |X| \mid \forall \Delta \in \mathcal{F},\, \alpha \in \Phi(\Delta) \Rightarrow \omega \in \Phi(\Delta)\} \\
&= \{\omega \in |X| \mid \forall \Delta \in \mathcal{F},\, \alpha |\!\vdash \Delta \Rightarrow \omega |\!\vdash \Delta\}
\end{aligned}$$

Que relação existe entre $\Uparrow(\alpha)$ e $\lceil \alpha \rceil$?

Lema 6.3

Nas condições da definição 6.8, para qualquer $\alpha \in |X|$,

$$\Uparrow(\alpha) \subseteq \lceil \alpha \rceil$$

PROVA:

$$\begin{aligned}
\omega \in \lceil \alpha \rceil &\Leftrightarrow \forall \Delta \in \mathcal{F},\ \alpha |\!\vdash \Delta \Rightarrow \omega |\!\vdash \Delta \\
&\Leftrightarrow \forall \Delta \in \overline{\Phi}(\alpha),\ \omega \in \Phi(\Delta) \\
&\Leftrightarrow \forall \Delta \in \overline{\Phi}(\alpha)\, \exists \beta \leq \omega \,:\, \beta \in \Phi(\Delta) \\
\omega \in \Uparrow(\alpha) &\Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \preceq \beta,\, \beta \in K(|X|)} \uparrow(\beta) \\
&\Leftrightarrow \exists \beta \leq \omega \,:\, \alpha \preceq \beta \\
&\Leftrightarrow \exists \beta \leq \omega \,:\, \beta \in \lceil \alpha \rceil \\
&\Leftrightarrow \exists \beta \leq \omega\, \forall \Delta \in \overline{\Phi}(\alpha) \,:\, \beta \in \Phi(\Delta)
\end{aligned}$$

Portanto, $\omega \in \Uparrow(\alpha) \Rightarrow \omega \in \lceil \alpha \rceil$; pelo que $\Uparrow(\alpha) \subseteq \lceil \alpha \rceil$.

□

Proposição 6.10

Dado um modelo de traços $< \mathcal{F}, X, \Phi >$ para um agente A, e sendo $\alpha \in |X|$,

$$\lceil\alpha\rceil = \bigcap_{\Delta\in\overline{\Phi}(\alpha)} \Phi(\Delta)$$

PROVA:

$$\begin{array}{lll} \omega \in \lceil\alpha\rceil & \text{sse} & \forall\Delta \in \mathcal{F},\ \alpha \in \Phi(\Delta) \Rightarrow \omega \in \Phi(\Delta) \\ & \text{sse} & \forall\Delta \in \overline{\Phi}(\alpha),\ \omega \in \Phi(\Delta) \end{array}$$

Logo, $\lceil\alpha\rceil = \bigcap_{\Delta\in\overline{\Phi}(\alpha)} \Phi(\Delta)$
□

Proposição 6.11
Seja $<\mathcal{F}, X, \Phi>$ um modelo de traços de um agente A e $\alpha \in |X|$. Definindo

$$\Delta_\alpha \doteq \bigwedge\{\Delta \mid \Delta \in \overline{\Phi}(\alpha)\}$$

temos $\Phi(\Delta_\alpha) = \Uparrow(\alpha)$.

PROVA: Repare-se que $\Delta_\alpha \doteq \bigwedge\{\Delta \mid \Delta \in \overline{\Phi}(\alpha)\} = \bigcup\{\Delta \mid \Delta \in \overline{\Phi}(\alpha)\}$

$$\begin{array}{lll} \omega \in \Phi(\Delta_\alpha) & \text{sse} & \omega || \!- \Delta_\alpha \\ & \text{sse} & \exists\beta \leq \omega\ :\ \beta || \!- \Delta_\alpha \\ & \text{sse} & \exists\beta \leq \omega\ \forall\Delta \in \overline{\Phi}(\alpha),\ \beta || \!- \Delta \\ & \text{sse} & \exists\beta \leq \omega,\ \alpha \preceq \beta \\ & \text{sse} & \omega \in \bigcup_{\alpha\preceq\beta} \uparrow(\beta) \\ & \text{sse} & \omega \in \Uparrow(\alpha) \end{array}$$

Portanto, $\Phi(\Delta_\alpha) = \Uparrow(\alpha)$.
□

Como se sabe todo o elemento da base de $\Omega(X)$ é da forma $\Phi(\Delta) \doteq \{\omega \in |X| \mid \omega || \!- \Delta\}$ $= \{\omega \in |X| \mid \exists\alpha \leq \omega\ :\ \alpha || \!- \Delta\}$. Sabemos também que se $\alpha || \!- \Delta$ e $\beta \in \uparrow(\alpha)$ então $\beta || \!- \Delta$. Portanto, todo o elemento da base $\Phi(\Delta)$ pode ser representado por $\bigcup_{\alpha\in S} \uparrow(\alpha)$, com $S \subseteq K(|X|)$.

Teorema 6.2
Dado um modelo de traços $<\mathcal{F}, X, \Phi>$ para um agente $A \doteq <\Sigma, \mathcal{C}, \vdash>$, e sendo $\Delta \in \mathcal{F}$ e $S \subseteq K(|X|)$:

$$\text{se} \quad \Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha\in S} \uparrow(\alpha) \quad \text{então} \quad \Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha\in S} \Uparrow(\alpha)$$

PROVA:

- Para qualquer $\alpha \in K(|X|)$, $\uparrow(\alpha) \subseteq \Uparrow(\alpha)$ por definição de $\Uparrow(\alpha)$. Sendo assim, e uma vez que $\Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha\in S} \uparrow(\alpha)$ é trivial verificar que $\Phi(\Delta) \subseteq \bigcup_{\alpha\in S} \Uparrow(\alpha)$.
- Como se sabe, $\alpha \preceq \beta$ sse $\forall\Delta \in \mathcal{F},\ \alpha \in \Phi(\Delta) \Rightarrow \beta \in \Phi(\Delta)$. Dado que $\Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha\in S} \uparrow(\alpha)$, podemos dizer que, para cada $\alpha \in S$,

  $$\alpha \preceq \beta \ \Rightarrow\ \beta \in \Phi(\Delta)$$

  Como $\Phi(\Delta)$ é um aberto de Scott temos que $\uparrow(\beta) \subseteq \Phi(\Delta)$. Logo $\forall\ \beta \succeq \alpha$, $\uparrow(\beta) \subseteq \Phi(\Delta)$ e portanto

  $$\bigcup_{\alpha\preceq\beta} \uparrow(\beta) \ \subseteq\ \Phi(\Delta)$$

Donde, para todo $\alpha \in S$, $\Uparrow(\alpha) \subseteq \Phi(\Delta)$. Portanto, $\bigcup_{\alpha \in S} \Uparrow(\alpha) \subseteq \Phi(\Delta)$

Acabamos pois de provar que $\bigcup_{\alpha \in S} \uparrow(\alpha) = \Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha \in S} \Uparrow(\alpha)$, com $S \subseteq K(|X|)$.
□

Teorema 6.3
Seja $< \mathcal{F}, X, \Phi >$ um modelo de traços de um agente $< \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$ e seja $\alpha \in K(|X|)$. Todo o aberto de $\Omega(X)$ da forma $\Uparrow(\alpha)$ é compacto.

PROVA: Sendo cada $O_i \in \Omega(X)$,

$$\Uparrow(\alpha) \subseteq \bigcup_i O_i = \bigcup_i \cup_{\Delta \in \mu_i} \Phi(\Delta) = \bigcup_{\Delta \in \mu} \Phi(\Delta) \quad , \text{ sendo } \mu = \cup_i \mu_i \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$$

Portanto, podemos considerar sempre uma cobertura de abertos da base.

Dado uma qualquer cobertura de $\Uparrow(\alpha)$ de abertos da base

$$\Uparrow(\alpha) \subseteq \bigcup_{\Delta \in \mu} \Phi(\Delta) \quad , \ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$$

como $\alpha \in \Uparrow(\alpha)$, vai existir um $\Theta \in \mu$ tal que $\alpha \in \Phi(\Theta)$.

Logo, $\Theta \in \overline{\Phi}(\alpha)$ pelo que $\bigcap_{\Delta \in \overline{\Phi}(\alpha)} \Phi(\Delta) \subseteq \Phi(\Theta)$. Portanto,

$$\lceil \alpha \rceil \subseteq \Phi(\Theta)$$

Como $\Uparrow(\alpha) \subseteq \lceil \alpha \rceil$ teremos também que $\Uparrow(\alpha) \subseteq \Phi(\Theta)$.

Em conclusão, dada uma qualquer cobertura de $\Uparrow(\alpha)$ por abertos, existe uma sub-cobertura finita de $\Uparrow(\alpha)$; logo $\Uparrow(\alpha)$ é compacto.
□

Vimos que todo o elemento $\Phi(\Delta)$ da base pode ser representado por $\Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha \in S} \uparrow(\alpha)$ $= \bigcup_{\alpha \in S} \Uparrow(\alpha)$, $S \subseteq K(|X|)$. Como todo o aberto da forma $\Uparrow(\alpha)$ é compacto, e como sabemos que todo o conjunto $\Uparrow(\alpha)$ é sempre um aberto, pois $\Uparrow(\alpha) = \Phi(\Delta_\alpha)$, podemos afirmar que os elementos da forma $\Uparrow(\alpha)$, com $\alpha \in K(|X|)$ formam uma base de $\Omega(X)$. Portanto, $\Omega(X)$ tem uma base de compactos.

Falta agora ver se a condição (ii) é satisfeita, ou seja, se $K(\Omega(X))$ é um sub-reticulado de $\Omega(X)$. É facil de ver que a reunião de dois compactos de $\Omega(X)$ é ainda um compacto. Sejam $C, C' \in K(\Omega(X))$ e $O_i \in \Omega(X)$,

$$\begin{array}{lll} C \cup C' \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i & \Rightarrow & (\exists I_0 \subseteq_f I \ : \ C \subseteq \bigcup_{i \in I_0} O_i) \quad \text{e} \quad (\exists I_0' \subseteq_f I \ : \ C' \subseteq \bigcup_{i \in I_0'} O_i) \\ & \Rightarrow & (\exists I_0 \cup I_0' \subseteq_f I \ : \ C \cup C' \subseteq \bigcup_{i \in I_0 \cup I_0'} O_i) \end{array}$$

Será que a intersecção de dois compactos de $\Omega(X)$ é ainda um compacto ?

Uma vez que $\{\Uparrow(\alpha)\}_{\alpha \in K(|X|)}$ é uma base de compactos de $\Omega(X)$, podemos afirmar que todo o compacto de $\Omega(X)$ é da forma

$$\bigcup_{\alpha \in S_0} \Uparrow(\alpha) \quad , \quad \text{com } S_0 \subseteq_f K(|X|)$$

Consideremos então a intersecção de dois compactos. Sendo $S_0, S_0' \subseteq_f K(|X|)$,

$$\bigcup_{\alpha \in S_0} \Uparrow(\alpha) \cap \bigcup_{\alpha' \in S_0'} \Uparrow(\alpha') = \bigcup_{\alpha \in S_0, \alpha' \in S_0'} \Uparrow(\alpha) \cap \Uparrow(\alpha')$$

Se os conjuntos da forma $\Uparrow(\alpha)$ forem fechados por intersecções finitas, então poderemos garantir que $\bigcup_{\alpha \in S_0, \alpha' \in S_0'} \Uparrow(\alpha) \cap \Uparrow(\alpha')$ é um compacto. Mas acontece que esta condição não é necessariamente verdadeira.

Para resolver o problema da coerência de $\Omega(X)$, podemos tentar impor uma condição alternativa a esta e que tem consequências práticas muito interessantes. Essa condição é a seguinte: *todo o $\Phi(\Delta)$ é compacto.*

Proposição 6.12

Seja $< \mathcal{F}, X, \Phi >$ um modelo de traços para um agente A.

$$\textit{Se} \quad \forall \Delta \in \mathcal{F},\ \Phi(\Delta) \in K(\Omega(X)) \quad \textit{então} \quad \Omega(X) \textit{ é um local coerente.}$$

PROVA:

(i) Dado que $\{\Phi(\Delta)\}_{\Delta \in \mathcal{F}}$ é uma base, e todo o $\Phi(\Delta)$ é compacto, todo o aberto é uma união de compactos.

(ii) Já vimos que a união finita de compactos é sempre um compacto.

Quanto à intersecção podemos ver que todo o compacto de $\Omega(X)$ pode ser escrito da forma

$$\bigcup_{\Delta \in \mu} \Phi(\Delta) \quad , \quad \text{com } \mu \subseteq_f \mathcal{F}$$

Portanto, a intersecção de dois compactos é ainda um compacto. Senão vejamos: sendo $\mu, \mu' \subseteq_f \mathcal{F}$,

$$\bigcup_{\Delta \in \mu} \Phi(\Delta) \cap \bigcup_{\Delta' \in \mu'} \Phi(\Delta') = \bigcup_{\Delta \in \mu, \Delta' \in \mu'} \Phi(\Delta \cup \Delta') = \bigcup_{\Theta \in \nu} \Phi(\Theta),$$

com $\nu = \{\Delta \cup \Delta' \mid \Delta \in \mu \text{ e } \Delta' \in \mu'\}$. Como μ e μ' são finitos, ν é também finito.

□

Vejamos as consequências práticas desta condição.

Proposição 6.13

Dado um modelo de traços $< \mathcal{F}, X, \Phi >$ para um agente $A \doteq < \Sigma, \mathcal{C}, \vdash >$, e sendo $\Delta \in \mathcal{F}$:

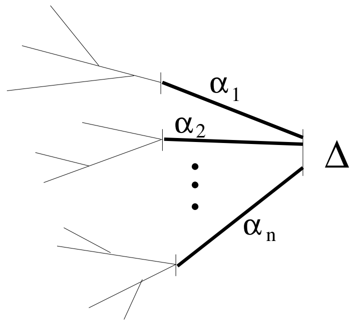
$$\textit{Se} \quad \Phi(\Delta) \textit{ é compacto} \quad \textit{então} \quad \Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha \in S_0} \Uparrow(\alpha) \quad , \quad \textit{para algum } S_0 \subseteq_f \Phi(\Delta) \cap \mathcal{C}^*$$

PROVA: Dado que todo o conjunto $\Phi(\Delta)$ é um aberto de Scott podemos escrever $\Phi(\Delta)$ $= \bigcup_{\alpha \in \Phi(\Delta) \cap \mathcal{C}^*} \uparrow(\alpha)$ e portanto $\Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha \in \Phi(\Delta) \cap \mathcal{C}^*} \Uparrow(\alpha)$ pelo teorema 6.2. Se $\Phi(\Delta)$ é compacto, tem de certeza uma subcobertura finita, então

$$\Phi(\Delta) = \bigcup_{\alpha \in S_0} \Uparrow(\alpha) \quad , \quad \text{com } S_0 \subseteq_f \Phi(\Delta) \cap \mathcal{C}^*$$

□

À partida não há garantia de que todo o $\Delta \in \mathcal{F}$ gera um $\Phi(\Delta)$ compacto. O facto de $\Phi(\Delta)$ ser compacto diz-nos que há um número finito de "caminhos disjuntos" que conduzem a Δ.

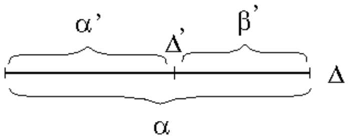


Ou seja, na procura de uma justificação para Δ há um número finito de hipóteses a procurar. Esta é, sem dúvida, uma característica desejável para toda a propriedade $\Delta \in \mathcal{F}$.

Uma condição interessante de impor é a de que toda a propriedade $\Delta \in \mathcal{F}$ gera um aberto $\Phi(\Delta)$ compacto.

Como é que esta condição se reflecte na prática ?

Ao procurarmos verificar que $\alpha|\!\vdash\Delta$, existe um número finito de regras que unificam com sufixos de α, que podem aparecer numa tal prova.



Para cada $\alpha|\!\vdash\Delta$, existe um número finito de regras $\Delta'|\!\vdash\beta'\Delta$ tal que $\beta' \leq \alpha$. Deste modo, cada hipótese protagonizada por uma regra $\Delta'|\!\vdash\beta'\Delta$, transforma a prova de $\alpha|\!\vdash\Delta$ numa prova de $\alpha'|\!\vdash\Delta'$. Partindo do princípio que todos os $\Phi(\Delta)$ são compactos, existe um número finito de regras que podem ser aplicadas na prova de $\alpha'|\!\vdash\Delta'$ e assim sucessivamente. Por esse motivo, e uma vez que α é finito, temos garantias que a prova termina sempre. Ou seja, se todos os $\Phi(\Delta)$ forem compactos, temos a garantia de que na prova de um $\alpha|\!\vdash\Delta$ qualquer, nunca se corre o risco de enveredar por caminhos de prova intermináveis. Esta é sem dúvida uma característica muito importante.

Proposição 6.14

Seja $< \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models>$ um modelo de estados de $\mathbf{ModET}_A$*, resultante da conversão de um modelo de traços $< \mathcal{F}, X, \Phi >$ de um agente A.*

$$\text{Se} \quad \forall\Delta \in \mathcal{F},\ \Phi^\circ(\Delta) \in K(\Omega(X^\circ)) \quad \text{então} \quad \Omega(X^\circ) \textit{ é um local coerente.}$$

PROVA: Trivial a partir da proposição 6.12, dado que $\Omega(X) \cong \Omega(X^\circ)$.
□

Encontramos uma condição para o local $\Omega(X^\circ)$ ser coerente. Se adicionalmente o espaço X° for sóbrio, então o espaço X° é coerente.

Apesar de pensarmos que a coerência de $\Omega(X^\circ)$ vai influenciar a sobriedade de X° e de termos investido bastante tempo nesse estudo, não conseguimos resultados satisfatórios pelo que vamos impor a sobriedade do espaço.

Tanto a coerência do local $\Omega(X^\circ)$ como a sobriedade do espaço X° são características muito importantes num modelo.

Definição 6.9

Seja $m \doteq < \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ *um modelo de estados de* $\mathbf{ModET}_A$*, resultante da conversão de um modelo de traços* $< \mathcal{F}, X, \Phi >$ *de um agente* A.

Se X° *for um espaço coerente, diz-se que* m *é um modelo de estados* **coerente**.

□

Vejamos então como é que a coerência do espaço X° caracteriza o espaço de estados.

Seja $m \doteq < \mathcal{K}, \mathcal{F}, \delta, \models >$ um modelo de estados coerente. Como se sabe, todo o local coerente é espacial. Assim, dado que $\Omega(X^\circ)$ é um local coerente, temos que $\Omega(X^\circ)$ é espacial. Então, $\forall O, O' \in \Omega(X^\circ)$,

$$O \not\leq O' \quad \Rightarrow \quad \exists p \in pt(\Omega(X^\circ)) \; : \; O \in p \;\text{ e }\; O' \notin p$$

Em particular, considerando os abertos $\Phi^\circ(\Delta)$ e $\Phi^\circ(\Delta')$, com $\Delta, \Delta' \in \mathcal{F}$, tem-se

$$\Phi^\circ(\Delta) \not\leq \Phi^\circ(\Delta') \quad \Rightarrow \quad \exists p \in pt(\Omega(X^\circ)) \; : \; \Phi^\circ(\Delta) \in p \;\text{ e }\; \Phi^\circ(\Delta') \notin p$$

ou seja, se $\Phi^\circ(\Delta) \not\leq \Phi^\circ(\Delta')$ então as propriedades Δ e Δ' são separáveis por $\Omega(X^\circ)$.

Como o espaço X° é sóbrio, $pt(\Omega(X^\circ))$ coincide com o espaço de estados do modelo. Nestas condições pode verificar-se então que

$$\Phi^\circ(\Delta) \not\leq \Phi^\circ(\Delta') \quad \Rightarrow \quad \exists k \in X^\circ \; : \; k \models \Delta \;\text{ e }\; k \not\models \Delta'$$

uma vez que todo o ponto de $pt(\Omega(X^\circ))$ é da forma $\{O \in \Omega(X^\circ) \mid k \in O\}$ para algum $k \in X^\circ$ e portanto

$$\Phi^\circ(\Delta) \in p \quad \text{sse} \quad \exists k \in X^\circ \; : \; k \in \Phi^\circ(\Delta) \quad \text{sse} \quad \exists k \in X^\circ \; : \; k \models \Delta$$

Podemos então dizer que dadas duas propriedades quaisquer Δ e Δ' de $\mathcal{F}$ tais que $\Phi^\circ(\Delta) \neq \Phi^\circ(\Delta')$, existe sempre um estado do modelo que separa Δ de Δ'. Ou seja, existe sempre um estado que valida uma das propriedades e não valida a outra.

Logo, nas condições do modelo de estados m ser coerente:

- Por um lado, não temos estados "a mais" uma vez que o espaço X° é T_0, e portanto, para quaisquer dois estados distintos existe sempre uma propriedade que é válida num dos estados e que não é válida no outro (isto é, nunca temos estados distintos a validarem exactamente as mesmas propriedades).

- Por outro lado, não temos estados "a menos" uma vez que para quaisquer duas propriedades não equivalentes semanticamente (ou seja, propriedades Δ e Δ' tal que $\Phi^\circ(\Delta) \neq \Phi^\circ(\Delta')$) existe sempre um estado que valida uma das propriedades e que não valida a outra.

Portanto, nestas circunstâncias não temos estados nem "a mais" nem "a menos", temos os estados necessários e suficientes para separar propriedades semanticamente distinguidas pelo morfismo Φ°.

Neste sentido, podemos dizer que quando o modelo de estados é coerente temos o estado mínimo necessário para separar todas as propriedades que são semanticamente distintas nesse modelo.

7 Conclusões

O objectivo desta dissertação era definir um formalismo de especificação de comportamento de sistemas computacionais que conseguisse sintetizar algumas ideias que existiam à partida:

- Descrever o comportamento através da definição de um sistema lógico.
- O encadeamento de eventos ocorridos no passado reflete-se nas propriedades que se observam no estado presente. Queria-se construir um sistema lógico que conseguisse descrever esta realidade.
- Ter a possibilidade de definir o conjunto de regras do sistema dedutivo tornando assim o sistema bastante flexível.
- Um dado estado pode ser alcançado pela ocorrência de sequências de eventos distintas. No entanto, o facto de esses comportamentos conduzirem a um mesmo estado torna-os de algum modo equivalentes.

  Portanto, um desafio que se colocava era o de tentar construir o estado através da descrição do comportamento.

Neste trabalho apresentamos o resultado dos desenvolvimento destas ideias. Assim, foi definido um formalismo para especificação do comportamento de sistemas computacionais.

A unidade básica de especificação, o agente, é uma forma muito particular de um sistema lógico que tem como característica fundamental o facto dos eventos serem vistos como conectivas lógicas. As fórmulas baseiam-se na noção de causa essencial de uma propriedade face a um evento, e o sistema de dedução tem características que reflectem a noção de causa.

A especificação do comportamento do agente é assim feita pela descrição de regras de inferência.

Para caracterizar semanticamente os agentes foi feita a ligação entre o sistema lógico e os seus modelos topológicos, tendo por base a dualidade de Stone.

Foram apresentados dois tipos de modelos: os modelos de traços, intimamente ligados à noção de evento e traço; e os modelos de estados, baseados no noção de estado e de transição de estados. Também foi apresentado um método de conversão dos modelos de traços para os modelos de estados, que reflecte a ideia de que o estado pode ser visto como uma classe de equivalência do que aconteceu no passado.

Uma vez que fizemos uma caracterização semântica dos agentes via topologia, vimos também como certas propriedades topológicas dos modelos se refletem ao nivel do espaço de estados.

Antes de chegar a este ponto muitas etapas foram percorridas, muitas ideias foram equacionadas e muitas vezes abandonadas. Temos consciência de que este trabalho deixa muitas "pontas" soltas. Muitos aspectos há que necessitam ser mais explorados, mas infelizmente por limitações de tempo não o foi possível fazer. Nestas condições, e entre outros aspectos, podemos destacar os seguintes:

- Estudar as condições mais fracas que é necessário ter presentes nos modelos para garantir a sua sobriedade e coerência.

- O estudo das propriedades das categorias definidas ao longo deste trabalho não era, à partida, nosso objectivo para esta dissertação. No entanto, reconhecemos que um tal estudo será muito importante. Nomeadamente, é necessário investigar as propriedades de completude e co-completude das categorias dos agentes, dos modelos de traços e dos modelos de estados.

- A inserção dos agentes no contexto categorial resulta da necessidade de dar resposta a questões tão fundamentais como a composição paralela, a escolha, a agregação de agentes com sincronização de eventos.

  Embora este aspecto tenha merecido a nossa atenção, não é feito neste documento nenhuma apresentação pois entendemos que é necessário investir um pouco mais de tempo no seu estudo. Deverá, portanto, ser objecto de trabalho futuro.

- Definimos dois tipos de modelos para os agentes: modelo de traços e o modelo de estados, e apresentamos um processo de conversão dos modelos de traços em modelos de estados. Embora seja este o sentido da conversão que parece mais natural, dado que os computadores são máquinas com estado, nada impede de pensarmos na conversão em sentido contrário: dos modelos de estados para os modelos de traços. Esta conversão está, com certeza, ligada à teoria das linguagens e dos automatos. É natural que seja necessário garantir previamente que o modelo de estados seja correcto para que a conversão seja possível.

Como já dissemos, este trabalho não tem pretenções de ser uma solução absoluta e definitiva para problema que inicialmente foi proposto. Por isso, será natural que no futuro venha a ser enriquecido.

Referências

[1] Samson Abramsky. Domain theory in logical form. *Annals of Pure and Applied Logic*, 51:1–77, 1991.

[2] Samson Abramsky. Interaction categories and communicating sequential processes. In A. W. Roscoe, editor, *A Classical Mind: Essays in honour of C. A. R. Hoare*, pages 1–16. Prentice Hall International, January 1994.

[3] Samson Abramsky and Achim Jung. *Handbook of Logic in Computer Science*, volume III, chapter Domain Theory. Clarendon Press - Oxford, 1994.

[4] Simon Ambler, Marta Z. Kwiatkowska, and Nicholas Measor. On duality for the modal μ-calculus.

[5] Matthew Hennessy. *Algebraic Theory of Processes.* MIT Press, 1988.

[6] C.A.R. Hoare. *Communicating Sequential Processes.* Series in Computer Science. Prentice-Hall International, 1985.

[7] P.T. Johnstone. *Stone Spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, 1982.

[8] Marta Z. Kwiatkowska. Infinite behaviour and fairness in concurrent constraint programming. *Lectures Notes in Computer Science.*

[9] Marta Z. Kwiatkowska. *Tolpology and Category Theory in Computer Science*, chapter On topological characterization of behavioural properties. Clarendon Press - Oxford, 1991.

[10] J. Lambek and P.J. Scott. *Introduction to higher order categorical logic*, volume 7 of *Cambridge studies in advanced mathematics.* Cambridge University Press, 1986.

[11] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1971.

[12] Robin Milner. *Communication and Concurrency.* Series in Computer Science. Prentice-Hall International, 1989.

[13] Benjamin C. Pierce. *Basic Category Theory for Computer Scientists.* The MIT Press, 1991.

[14] Axel Poigné. *Handbook of Logic in Computer Science*, volume I, chapter Basic Category Theory. Clarendon Press - Oxford, 1992.

[15] D. S. Scott. Continuous lattices. In F.W. Lawvere, editor, *Toposes, algebraic geometry and logic*, volume 274 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 97–136. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[16] D. S. Scott and C. Strachey. Toward a mathematical semantics for computer languages. In J. Fox, editor, *Proceedings of the Symposium on Computers and Automata*, pages 19–46, New York, 1971. Polytechnic Institute of Brooklin Press.

[17] M. Smyth. Powerdomains and predicate transformers: a topological view. In J. Diaz, editor, *Automata, Languages and Programming*, volume 154 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 662–675. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[18] M.B. Smyth. *Handbook of Logic in Computer Science*, volume I, chapter Topology. Clarendon Press - Oxford, 1992.

[19] Colin Stirling. *Handbook of Logic in Computer Science*, volume II, chapter Modal and Temporal Logics. Clarendon Press - Oxford, 1992.

[20] J.M. Valença. Lógica computacional. Technical report, Departamento de Informática - Universidade do Minho, 1991.

[21] J.M. Valença. Teoria dos processos. Apontamentos de Algebra de Processos - Mestrado em Informática. (Manuscritos), 1993.

[22] Steve Vickers. Geometric logic in computer science.

[23] Steve Vickers. *Topology Via Logic*, volume 5 of *Cambridge Tracs in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 1989.

[24] Glynn Winskel and Mogens Nielsen. *Handbook of Logic in Computer Science*, volume III, chapter Models for Concurrency. Clarendon Press - Oxford, 1994.

[25] Lu Zhongwan. *Mathematical Logic for Computer Science*. World Scientific, 1989.