Elementos Lógicos da Programação I

Caderno de Exercícios

Maria João Frade
Departamento de Informática
Universidade do Minho
2005

2^o Ano LMCC (2004/05)

Conteúdo

1 Ficha 1

1. Considere os seguintes modelos de $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$:

$$M_1 = \{p, q\} \quad \text{e} \quad M_2 = \{q\}$$

   Determine a validade de cada uma das proposições seguintes no modelo M_1 e no modelo M_2:

   (a) $p \supset (q \wedge p)$

   (b) $(p \vee q) \supset \neg q$

2. Para cada uma das proposições seguintes apresente (se possível) um modelo que a valide e um que a refute.

   (a) $p \supset r$

   (b) $p \wedge r$

   (c) $\neg p \wedge \neg r$

   (d) $\neg(p \wedge r)$

   (e) $p \wedge \neg p$

   (f) $p \vee (p \supset r)$

3. Verifique que $((P \supset Q) \supset P) \supset P$ é uma tautologia.

4. Quais das seguintes consequências semânticas se verificam? Justifique.

   (a) $\{p \supset r\} \models p \wedge r$

   (b) $\{p, r\} \models p \supset r$

   (c) $\models p \vee \neg p$

   (d) $\{p \wedge \neg p\} \models p \vee r$

5. Defina uma função em Haskell que determine se uma *fórmula é consequência semântica de uma teoria.*

6. Demonstre que a seguinte relação é uma *relação de dedução*:

$$\Delta \vdash P \quad \text{sse} \quad P \in \Delta$$

   É *correcta*? É *completa*?

2 Ficha 2

1. Considere o sistema dedutivo de Hilbert para a lógica proposicional que tem apenas $\neg$ e $\supset$ como conectivas primitivas:

   (Ax1) $P \supset Q \supset P$
   (Ax2) $(P \supset Q \supset R) \supset (P \supset Q) \supset P \supset R$
   (Ax3) $(\neg P \supset Q) \supset (\neg P \supset \neg Q) \supset P$
   (MP) $\dfrac{P \qquad P \supset Q}{Q}$

   Usando este sistema dedutivo, apresente uma dedução para:

   (a) $\vdash Q \supset P \supset P$

   (b) $\vdash Q \supset (P \supset Q \supset P)$

   (c) $\vdash \neg P \supset P \supset Q$

   (d) $\{Q, P \supset Q \supset R\} \vdash P \supset R$

2. Considere o sistema dedutivo de Hilbert para a lógica proposicional que tem $\neg$ e $\supset$ como conectivas primitivas, e as abreviaturas:
   $A \wedge B \doteq \neg(A \supset \neg B)$ e $A \vee B \doteq \neg A \supset B$

   (A1) $A \supset B \supset A$
   (A2) $(A \supset B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C$
   (A3) $(\neg B \supset \neg A) \supset A \supset B$
   (A4) $(B \supset \neg A) \supset A \supset \neg B$
   (MP) $\dfrac{A \qquad A \supset B}{B}$

   Usando este sistema dedutivo, apresente uma dedução para:

   (a) $\vdash P \supset \neg\neg P$

   (b) $\vdash \neg B \vee B$

   (c) $\vdash B \supset (A \vee B)$

   (d) $\{P \supset Q, \neg(Q \supset R) \supset \neg P\} \vdash P \supset R$

3 Ficha 3

1. No sistema de dedução natural para a lógica proposicional intuicionista, $\mathbf{N}_i$, construa as seguintes deduções:

   (a) $\vdash R \supset P \supset P$

   (b) $\vdash A \supset A \vee B$

   (c) $\vdash (P \vee P) \supset P$

   (d) $A \wedge B \vdash \neg(A \supset \neg B)$

2. No sistema de dedução natural para a lógica proposicional clássica, $\mathbf{N}_c$, construa deduções dos teoremas:

   (a) $\neg\neg B \supset B$

   (b) $A \vee \neg A$

   (c) $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$

   (d) $(\neg A \supset C) \supset (A \supset C) \supset C$

3. Utilizando a formulação da dedução natural em sequentes para a lógica proposicional intuicionista, $\mathbf{Ns}_i$, construa deduções dos teoremas:

   (a) $A \supset B \supset A \wedge B$

   (b) $((P \supset Q) \wedge (P \supset R)) \supset P \supset (Q \wedge R)$

   (c) $((P \vee Q) \supset R) \supset ((P \supset R) \wedge (Q \supset R))$

   (d) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

   (e) $\neg(P \vee Q) \supset (\neg P \wedge \neg Q)$

4. No sistema de dedução natural em sequentes para a lógica proposicional clássica, $\mathbf{Ns}_c$, construa as seguintes deduções:

   (a) $\neg\neg P \vdash P$

   (b) $\vdash P \vee \neg P$

   (c) $\neg B \supset \neg A \vdash A \supset B$

   (d) $\neg A \supset C, A \supset C \vdash C$

4 Ficha 4

1. Utilize o sistema de prova assistida *Isabelle/Isar* para desenvolver as provas em dedução natural que realizou na ficha 3.
2. Desenvolva, no sistema LK de Gentzen para a lógica proposicional clássica, provas para os seguintes teoremas:
   (a) $\neg\neg P \supset P$
   (b) $P \vee \neg P$
   (c) $(P \vee (Q \wedge R)) \supset (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   (d) $(P \supset Q) \wedge (P \supset R) \supset P \supset (Q \wedge R)$
   (e) $((P \vee Q) \supset R) \supset (P \supset R) \wedge (Q \supset R)$
   (f) $\neg(P \vee Q) \supset \neg P \wedge \neg Q$
3. Use o sistema LK de Gentzen para a lógica proposicional clássica para demonstrar os seguintes sequentes:
   (a) $\neg(P \wedge Q) \;\Rightarrow\; P \supset \neg Q$
   (b) $A \supset \neg B,\, A \wedge B \;\Rightarrow$
4. Utilize o sistema *Isabelle/Isar* para desenvolver as deduções que realizou nas alíneas 2 e 3.
5. No sistema LJ de Gentzen para a lógica proposicional intuicionista, demonstre os teoremas que se seguem:
   (a) $(B \supset C) \supset (A \wedge B) \supset A \supset C$
   (b) $(A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$

5 Ficha 5

No âmbito da Lógica Proposicional Clássica

1. Determine a *forma normal negativa* equivalente a cada uma das seguintes proposições:

   (a) $(p \vee t) \supset (p \wedge t)$

   (b) $(p \wedge (p \supset t)) \supset \neg p$

   (c) $((p \supset t) \supset p) \supset p$

   (d) $(\neg p \supset t) \supset (\neg p \supset \neg t) \supset p$

2. Construa a *forma normal conjuntiva* e a *forma normal disjuntiva* equivalente a cada uma das proposições da alínea 1. (Pode partir das formas normais negativas determinadas na alínea 1.)

   Pela inspecção das respectivas formas normais conjuntivas ou disjuntivas, consegue determinar se alguma das proposições é uma tautologia ou é equivalente ao absurdo ? Justifique.

3. Partindo das formas normais negativas determinadas na alínea 1, represente as formas normais conjuntivas e disjuntivas equivalentes, sob a forma de listas de listas de literais. Utilize as operações sobre listas ($+$ e $\times$), definidas nas aulas teóricas, para construir a solução.

4. Das formas normais construidas na alínea 3, indique os *caminhos fechados* e as *formas fechadas*. O que pode concluir quanto à validade das proposições que lhe equivalem (que estão em 1) ?

5. Tendo por base os algoritmos usados nas alíneas anteriores:

   (a) Defina em Haskell uma função que testa a validade de uma proposição.

   (b) Defina em Haskell uma função que testa a inconsistência (ou equivalência ao absurdo) de uma proposição,

6 Ficha 6

1. Utilize o sistema de *tableaux* para verificar a validade das fórmulas:
   (a) $(p \vee t) \supset (p \wedge t)$
   (b) $(P \wedge (P \supset Q)) \supset \neg P$
   (c) $((P \supset Q) \supset P) \supset P$
   (d) $(\neg P \supset Q) \supset (\neg P \supset \neg Q) \supset P$
2. Utilize o sistema de *tableaux* para verificar as seguintes relações de deduções:
   (a) $A \wedge B \vdash \neg(A \supset \neg B)$
   (b) $\neg A \supset C, A \supset C \vdash C$
   (c) $\neg(P \wedge Q) \vdash P \supset \neg Q$
   (d) $A \supset \neg B \vdash \neg A \vee \neg B$
   (e) $P \supset Q, P \supset R \vdash P \supset Q \wedge R$
3. Apresente a execução do algoritmo de *Davis-Putnam* para testar a inconsistência das seguintes fórmulas:
   (a) $\neg((\neg p \supset t) \supset (\neg p \supset \neg t) \supset p)$ (FNC: $(p \vee t) \wedge (p \vee \neg t) \wedge \neg p)$
   (b) $(p \vee t) \supset (p \wedge t)$
   (c) $(p \wedge (p \supset t)) \supset \neg p$
   (d) $\neg(((p \supset t) \supset p) \supset p)$
   (e) $(\neg p \supset t) \supset (\neg p \supset \neg t) \supset p$
4. Use o método de *Davis-Putnam* para justificar a validade das seguintes relações de dedução:
   (a) $r \supset \neg s \vdash \neg r \vee \neg s$
   (b) $p \supset q, p \supset r \vdash p \supset q \wedge r$
5. Apresente a execução do algoritmo de *Davis-Putnam* para testar a validade das seguintes fórmulas:
   (a) $((p \supset t) \supset p) \supset p$ (FND: $p \vee (\neg p \wedge \neg p) \vee (t \wedge \neg p))$
   (b) $(\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

7 Ficha 7

1. Identifique nas fórmulas seguintes as instâncias livres e ligadas das variáveis:
   (a) $P(x) \supset (\exists x.P(x))$
   (b) $(\forall x.Q(x,y) \vee (\exists y.Q(x,y)))$
   (c) $(\forall x.P(x,y)) \vee (\exists y.P(x,y))$
2. Calcule as seguintes substituições:
   (a) $(P(x) \supset Q(x))[3/x]$
   (b) $(P(x) \supset (\exists x.P(x)))[3/x]$
   (c) $((\forall x.P(x,y)) \vee (\exists y.P(x,y)))[3/x][4/y]$
3. Prove pela via semântica, através de quadros de inconsistência, que as consequências seguintes se verificam:
   (a) $\models (\forall x.A) \supset (\exists x.A)$
   (b) $(\exists x.A), (\forall x.A \supset B) \models (\exists x.B)$
   (c) $(\exists x.A \vee B) \models (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$
4. Demonstre, utilizando o sistema de dedução hilbertiano para LPO, as relações seguintes:
   (a) $\vdash (A \supset (\forall x.B)) \supset (\forall x.A \supset B)$ se x não ocorre livre em A.
   (b) $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \ \vdash (\forall x.P(x))$
5. Desenvolva no sistema de dedução natural clássica para LPO, provas para as seguintes relações:
   (a) $\vdash (\forall x.A) \supset (\exists x.A)$
   (b) $(\exists x.A), (\forall x.A \supset B) \ \vdash (\exists x.B)$
   (c) $(\exists x.A \vee B) \ \vdash (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$
   (d) $\vdash (\exists x.A \supset B) \supset (\forall x.A) \supset (\exists x.B)$
   (e) $\vdash \neg(\exists x.A) \supset (\forall x.\neg A)$

8 Ficha 8

1. Os ficheiros DNFOL.thy e LKFOL.thy apresentam (no sistema de dedução natural e no sistema LK, respetivamente) provas desenvolvidas em *Isabelle/Isar* para os teoremas do exercício 5 da ficha 7. Analise estas provas e confronte-as as provas que desenvolveu manualmente.

2. Usando o sistema de dedução natural, demonstre os seguintes teoremas:

   (a) $\vdash \neg(\forall x.P(x)) \supset \exists x.\neg P(x)$

   (b) $(\forall x.A(x)) \supset \exists x.B(x) \ \vdash \exists x.A(x) \supset B(x)$

   (c) $\neg(\exists x.\neg P(x) \ \vdash \forall x.P(x)$

   (d) $\exists x.\forall y.P(x,y) \ \vdash \forall y.\exists x.P(x,y)$

3. Usando o sistema LK, demonstre os seguintes teoremas:

   (a) $\vdash \neg(\forall x.P(x)) \supset \exists x.\neg P(x)$

   (b) $(\forall x.A(x)) \supset \exists x.B(x) \ \vdash \exists x.A(x) \supset B(x)$

   (c) $\neg(\exists x.\neg P(x)) \ \vdash \forall x.P(x)$

   (d) $\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge A \supset Q(x,y),\ A \ \vdash \forall y.\exists x.P(x,y) \supset Q(x,y)$

   (e) $(\forall y.A(y)) \supset (\forall y.B(y) \wedge C(y)) \ \vdash (\exists x.\neg A(x)) \vee (\exists x.C(x))$

9 Ficha 9

A definição de *tablaux para a LPO* apresentada nos apontamentos teóricos da disciplina justifica a prova de $\Gamma \models \Phi$ através da prova da inconsistência de $\{\Gamma, \neg\Phi\}$.

1. Escreva as regras de expansão apresentadas para os *tablaux* em LPO, e justifique-as com base nas proposições e teoremas que conhece da aulas teóricas.

   (**Note que** o método de *tableaux apresentado para o cálculo proposicional* foi baseado na noção de refutação, tendo **regras de expansão duais** a estas, e construindo tableaux para a teoria $\{\neg\Gamma, \Phi\}$ para provar $\Gamma \vdash \Phi$.)

2. Usando *tableaux* para a LPO demonstre as seguintes relações de consequência:

   (a) $\models (\forall x.A) \supset (\exists x.A)$

   (b) $(\exists x.A), (\forall x.A \supset B) \models (\exists x.B)$

   (c) $(\exists x.A \vee B) \models (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$

   Confronte a solução apresentada com a resolução do exercício 3 da ficha 7.

3. Use *tableaux* para a LPO para provar as seguintes relações:

   (a) $\vdash (\exists x.A \supset B) \supset (\forall x.A) \supset (\exists x.B)$

   (b) $\vdash \neg(\exists x.A) \supset (\forall x.\neg A)$

   (c) $\vdash \neg(\forall x.P(x)) \supset \exists x.\neg P(x)$

   (d) $(\forall x.A(x)) \supset \exists x.B(x) \ \vdash \exists x.A(x) \supset B(x)$

   (e) $\neg(\exists x.\neg P(x)) \ \vdash \forall x.P(x)$

   (f) $\exists x.\forall y.P(x,y) \wedge A \supset Q(x,y),\ A \ \vdash \forall y.\exists x.P(x,y) \supset Q(x,y)$

   (g) $(\forall y.A(y)) \supset (\forall y.B(y) \wedge C(y)) \ \vdash (\exists x.\neg A(x)) \vee (\exists x.C(x))$

   (h) $\neg(P \wedge Q) \ \vdash P \supset \neg Q$

   (i) $A \supset \neg B \ \vdash \neg A \vee \neg B$

10 Ficha 10

1. As lógicas modais introduzem dois novos operadores unários:
   - o operador *necessidade* $\Box$ ($\Box\Phi$ lê-se "*necessariamente* Φ")
   - o operador *possibilidade* $\Diamond$ ($\Diamond\Phi$ lê-se "*possivelmente* Φ")

   Além disso, tem-se $\Diamond\Phi \equiv \neg\Box(\neg\Phi)$ e $\Box\Phi \equiv \neg\Diamond(\neg\Phi)$.

   Diga qual é a interpretação das fórmulas $\Box\Phi$ e $\Diamond\Phi$ numa

   (a) lógica *epistémica*
   (b) lógica *temporal*
   (c) lógica *diôntica*

2. Escreva fórmulas modais que representem as seguintes asserções:

   (a) "Se o João acabar o curso então há-de obter emprego."
   (b) "João não obtem emprego sem acabar o curso."
   (c) "Se João pisa a relva está sujeito a pagar uma multa."
   (d) "Sempre que João pisa a relva paga uma multa."

3. Use o cálculo de sequentes da Lógica Linear Proposicional para provar que as seguintes fórmulas são tautologias:

   (a) $A \otimes (A \multimap B) \multimap B$
   (b) $A \& B \multimap B \& A$
   (c) $A \parr B \multimap B \parr A$
   (d) $!(A\&B) \multimap !A \otimes !B$
   (e) $(!A \multimap B \multimap C) \multimap (!A \multimap B) \multimap !A \multimap C$

4. Quais das seguintes fórmulas são demonstráveis em Lógica Linear Clá¡ssica? Justifique a sua resposta.

(a) $A \oplus A^\perp$	(e) $A \multimap !A$	(i) $!A \otimes !B \multimap A \& B$
(b) $?(A \oplus A^\perp)$	(f) $A \multimap B \multimap A$	(j) $A \multimap A \parr B$
(c) $A \multimap A$	(g) $A \multimap !B \multimap A$	(k) $A \multimap A \oplus B$
(d) $!A \multimap A$	(h) $A \otimes B \multimap A \& B$	(l) $A \multimap A \& A$

11 Projecto

Pretende-se que implemente em Haskell os algoritmos do *Sistema de Tableaux* e do *Método de Davis-Putnam* para o Cálculo Proposicional Clássico.

1. Defina em Haskell funções que, com base no **Sistema de Tableaux**, permitam testar a validade:
   (a) de uma fórmula qualquer, P;
   (b) de uma relação de dedução, $\Gamma \vdash P$.
2. Defina em Haskell funções que, com base no **Método de Davis-Putnam**, permitam testar:
   (a) a inconsistência de uma fórmula qualquer, P;
   (b) a validade de uma relação de dedução, $\Gamma \vdash P$;
   (c) a validade de uma fórmula qualquer, P.

Apresente um pequeno relatório aonde constem:

- uma breve descrição dos algoritmos implementados;
- indicação das estruturas de dados de suporte aos algoritmos;
- indicação da assinatura das funções (principais) que desempenham as diferentes tarefas indicadas nos algoritmos;
- listagem do programa;
- exemplos de execução representativos.

Nota: não são exigidas funções sofisticadas para fazer a leitura de dados e/ou a apresentação de resultados (ou mesmo de resultados intermédios, justificando as respostas dadas). Estes e outros melhoramentos possíveis, são aspectos de valorização do programa, mas terão sempre um peso pequeno na nota final do trabalho.