2 Formação de Contextos, Termos e Tipos

1. Dos contextos a seguir apresentados indique, justificando, quais os contextos bem formados:

   i) $B : * \,,\; x : B \,,\; f : B \to B$

   ii) $A : * \,,\; y : B \,,\; B : * \,,\; x : A$

   iii) $A : * \,,\; B : * \,,\; f : B \to A \,,\; x : A$

   iv) $B : * \,,\; y : B \,,\; f : B \to B \,,\; A : * \,,\; x : A$

   v) $A : * \,,\; x : A \,,\; f : A \to A \,,\; (fx) : A$

   vi) $a : * \,,\; P : A \to * \,,\; x : A \,,\; t : (\Pi x : A.Px)$

   vii) $Q : * \to * \,,\; A : * \,,\; (\lambda A : *.QA) : *$

   viii) $A : * \,,\; x : A \,,\; B : * \,,\; F : A \to A \,,\; x : B$

   ix) $A : * \,,\; x : A \,,\; x : A \,,\; Y : (\Pi x : A.B)$

2. Os termos que se seguem são Γ-bem formados. Indique quais os contextos Γ que são necessários para garantir a sua boa formação.

   i) $\lambda x : A \to B.\lambda y : A.xy$

   ii) $\lambda A : *.\lambda x : A.x$

   iii) $\lambda P : A \to *.\lambda a : A.\lambda f : A \to A \to A.(P(fay))$

   iv) $(\lambda A : *.\lambda P : A \to *.PA)C$

   v) $(\lambda A : *.\lambda x : A.\lambda y : B.\lambda z : B \to B \to A.zy)((\lambda B : *.\lambda P : B \to *.PB)CQ)$

   vi) $(\lambda A : *.\Pi x : A.(\Pi Q : A \to *.Qx))$

3. Considere as seguites definições:

$$N \doteq \Pi C : *.C \to (C \to C) \to C$$
$$Z \doteq \lambda A : *.\lambda z : A.\lambda s : A \to A.z$$
$$S \doteq \lambda a : N.\lambda A : *.\lambda z : A.\lambda s : A \to A.s(aAzs)$$
$$+ \doteq \lambda b : N.\lambda a : N.\lambda A : *.\lambda z : A.\lambda s : A \to A.(bA)(aAzs)s$$

   Reduza à sua forma normal as expressões que se seguem:

   i) SZ

   ii) $S(SZ)$

   iii) $+(SZ)(S(SZ))$

4. Indique habitantes para os seguintes tipos:

   i) $\Pi A : *.A \to (A \to A \to A) \to A$

   ii) $\Pi x : A.\Pi y : B.A \to B \to A$

   iii) $\Pi P : A \to *.\Pi x : A.(Px) \to (Px)$