1 λ-Calculus com Tipos

1. Considere as seguintes variáveis tipadas:

$$z : \alpha \ , \ a : (\alpha \to \beta) \to \alpha \ , \ y : (\alpha \to \beta) \to \omega \ , \ x : \alpha \to \beta$$

e as seguintes expressões:

i) $\lambda z.yx$

ii) $\lambda zx.xz$

iii) $(\lambda y.(\lambda z.yx)(ax))$

Porque é que estas expressões, embora válidas no λ-calculus simples, não são termos sintaticamente válidos no λ-calculus com tipos ?

Reescreva estas expressões usando a notação de *Church*, e indique o seu tipo.

2. Considere os seguintes combinadores básicos:

$F \doteq \lambda xy.y$ $\quad T \doteq \lambda xy.yx$ $\quad K \doteq \lambda xy.x$

$P \doteq \lambda xya.axy$ $\quad S \doteq \lambda xya.xa(ya)$

Indique, para cada um destes combinadores, qual terá de ser o tipo mais genérico das variáveis para que os combinadores sejam válidos no λ-calculus com tipos, e indique o tipo de cada combinador.

3. Considere o combinador $S \doteq \lambda xya.xa(ya)$ e expressões $M : \mathit{bool} \to \tau$ e $N : \mathit{bool} \to \mathit{bool}$, sendo τ um tipo desconhecido.

Qual deve ser o tipo τ para que SMN seja uma expressão-λ bem formada e qual o seu tipo.

4. Considere o contexto com as seguintes variaveis tipadas

$$A : * \ , \ B : * \ , \ C : * \ . \ x : A \ , \ p : A \ , \ y : A \ , \ z : A \to A \ , \ e : B$$

i) Simplifique $(\lambda z : A \to A.\lambda y : A.zy)(\lambda y : A)x$

ii) Mostre que $(\lambda x : A.(\lambda y : A.\lambda z : A \to A.zy)x)p(\lambda x : A.x) \equiv p$

iii) Simplifique
$(\lambda a{:}A.\lambda q{:}A \to B \to C.\, q\, (\, (\lambda v{:}A \to B \to A.\lambda b{:}B.v)(\lambda x{:}A.\lambda b{:}B.x)\, eae)((\lambda x{:}A.(\lambda f{:}B.f)e)a))\, y$

5. Deduza o tipo da expressão-λ t, sendo

$$t \doteq \lambda B : *.\lambda z : A \to B.\lambda y : A.zy$$

Seja s uma expressão do tipo $A \to C$. Qual será o tipo da expressão $t\, C\, s$.

6. Deduza o tipo das seguintes expressões-λ

i) $\lambda x : A.\lambda y : B.\lambda C : *.\lambda p : A \to B \to C.pxy$

ii) $\lambda A : *.\lambda x : A.\lambda P : A \to *.\lambda y : (Px).y$

iii) $\lambda p : A \to (\Pi C : *.C).\lambda C : *.\lambda a : A.paC$