**Métodos de Programação I**

2.º Ano da LMCC (701055) + LESI (531316)
Ano Lectivo de 1999/2000

Exame (época normal, 2.ª chamada) — 15 de Fevereiro de 2000
14h30
Sala 2306

---

**NB**: *Esta prova consta de **10** alíneas que valem, cada uma, 2 valores.*

1. *Responda a cada um dos grupos de questões em folhas separadas.*
2. *Para sua consulta, encontra anexa a esta prova a listagem das principais leis de programação estudadas na disciplina.*

PROVA SEM CONSULTA (3 $horas$)

GRUPO I

**Questão 1** Indique qual das leis que constam do anexo é justificada pelo raciocínio que se segue,

$$
\begin{array}{ll}
 & \langle i,j\rangle \cdot h = \langle f,g\rangle \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot (\langle i,j\rangle \cdot h) = f \\ \pi_2 \cdot (\langle i,j\rangle \cdot h) = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \ldots \text{(justifique)} \ldots \} \\
 & \langle i,j\rangle \cdot h = \langle f,g\rangle \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\pi_1 \cdot \langle i,j\rangle) \cdot h = f \\ (\pi_2 \cdot \langle i,j\rangle) \cdot h = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \ldots \text{(justifique)} \ldots \} \\
 & \langle i,j\rangle \cdot h = \langle f,g\rangle \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i \cdot h = f \\ j \cdot h = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \ldots \text{(justifique)} \ldots \} \\
 & \langle i,j\rangle \cdot h = \langle i \cdot h, j \cdot h\rangle
\end{array}
$$

Justifique cada passo.

---

**Questão 2** Demonstre a propriedade de reflexão da exponenciação (lei (19) no anexo).

---

**Questão 3** Identifique as funções $g$ e $f$ que estabelecem o isomorfismo que se segue

$$
\begin{tikzcd}
B^{C\times A} \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & (B^A)^C \arrow[ll, bend left, "f"]
\end{tikzcd}
$$

e defina-as.

---

## GRUPO II

**Questão 4** Recorde a biblioteca `LTree.hs` em que, baseados no tipo indutivo

```
data LTree a = Leaf a | Split (LTree a, LTree a)
```

encontra como hilomorfismos algoritmos que, como `dfac` (*duplo factorial*), `fib` (*fibonacci*) e `mSort` (*merge-sort*), pertencem todos à mesma classe algorítmica.

1. Dado o gene `g = (either id (uncurry max))` em que `max` é uma função que conhece do HUGS STANDARD PRELUDE, o que faz a função `cataLTree g`?. Faça um diagrama que descreva esse catamorfismo e justifique.
2. Uma das vantagens de organizar o conhecimento algorítmico segundo o método estudado nesta disciplina é que se podem obter, dentro da mesma classe algorítmica, novos algoritmos pela simples combinação ou substituição de genes.

   Que função se obtém de `mSort` substituindo-lhe um dos genes (qual?) pela função `g` da alínea anterior? Faça um diagrama explicativo e converta-a, por cálculo, para HASKELL com variáveis.

---

**Questão 5** Considere o tipo de dados indutivo *listas (à direita) não vazias*:

```
data NRList a = Sing a | Add  (a , NRList a)
```

1. Comece por definir `inNRList`, `outNRList` e `recNRList`. Dada a função `f = (const ()) -|- id`, qual é o tipo de `(inRList . f)`, onde `inRList` é uma função que conhece do módulo `RList.hs`? Desenhe os diagramas justificativos da sua resposta.
2. Desenhe o diagrama do catamorfismo `cataNRList (inRList . f)` e calcule a função recursiva definida por este catamorfismo ao nível da variável, explicando o que a função obtida faz.

---

## GRUPO III

**Questão 6** Responda às seguintes alíneas:

1. Identifique ou defina as funções $f$ e $g$ que testemunham o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} A \times 1 \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A \arrow[ll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

   da esquerda para a direita e da direita para a esquerda, respectivamente (nota: assuma $1 \cong \{()\}$).
2. Recorrendo à função $swap$, como definiria a função que estabelece o isomorfismo $1 \times A \cong A$ da esquerda para a direita?
3. Considerando isomorfismos que conhece

   - $A^2 \cong A \times A$
   - $2 \times A \cong A + A$
   - $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$
   - $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$

   sintetize, justificando, o seguinte isomorfismo

$$A \times (1 + X)^2 \xrightarrow{v} A + A \times X + A \times X + A \times X^2$$

---

# Anexo–Cálculo de Funções

## Composição

| | | |
|---|---|---|
| **Natural-id** | $f \cdot id = id \cdot f = f$ | (1) |
| **Associatividade** | $(f \cdot g) \cdot h \quad = \quad f \cdot (g \cdot h)$ | (2) |

## Produto

| | | |
|---|---|---|
| **Universal-$\times$** | $k = \langle f, g \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{array} \right.$ | (3) |
| **Cancelamento-$\times$** | $\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \quad , \quad \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g$ | (4) |
| **Reflexão-$\times$** | $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \quad = \quad id_{A \times B}$ | (5) |
| **Fusão-$\times$** | $\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$ | (6) |
| **Absorção-$\times$** | $(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$ | (7) |
| **Functor-$\times$** | $(g \cdot h) \times (i \cdot j) \quad = \quad (g \times i) \cdot (h \times j)$ | (8) |
| **Functor-id-$\times$** | $id_A \times id_B \quad = \quad id_{A \times B}$ | (9) |

## Coproduto

| | | |
|---|---|---|
| **Universal-$+$** | $k = [f, g] \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{array} \right.$ | (10) |
| **Cancelamento-$+$** | $[g, h] \cdot i_1 = g \quad , \quad [g, h] \cdot i_2 = h$ | (11) |
| **Reflexão-$+$** | $[i_1, i_2] \quad = \quad id_{A+B}$ | (12) |
| **Fusão-$+$** | $f \cdot [g, h] = [f \cdot g, f \cdot h]$ | (13) |
| **Absorção-$+$** | $[g, h] \cdot (i + j) = [g \cdot i, h \cdot j]$ | (14) |
| **Functor-$+$** | $(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$ | (15) |
| **Functor-id-$+$** | $id_A + id_B = id_{A+B}$ | (16) |

## Exponenciação

| | | |
|---|---|---|
| **Universal** | $k = \overline{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = ap \cdot (k \times id)$ | (17) |
| **Cancelamento** | $f = ap \cdot (\overline{f} \times id)$ | (18) |
| **Reflexão** | $\overline{ap} = id_{B^A}$ | (19) |
| **Fusão** | $\overline{g \cdot (f \times id)} = \overline{g} \cdot f$ | (20) |
| **Absorção** | $\overline{f \cdot g} = f^A \cdot \overline{g}$ | (21) |
| **Functor** | $(g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A$ | (22) |
| **Functor-id** | $id^A = id$ | (23) |

## Misc.

| | | |
|---|---|---|
| **Lei da troca** | $[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] \quad = \quad \langle [f, h], [g, k] \rangle$ | (24) |