Métodos de Programação I

2.º Ano da LMCC (701055) + LESI (531316)
Ano Lectivo de 1999/2000

Exame (época normal) — 27 de Janeiro de 2000
09h30
Salas 2301 a 2307

NB:

1. *Esta prova consta de **10** alíneas que valem, cada uma, 2 valores.*
2. *Responda a cada um dos grupos de questões em folhas separadas.*
3. *Para sua consulta, encontra anexa a esta prova a listagem das principais leis de programação estudadas na disciplina.*

PROVA SEM CONSULTA (3 $horas$)

GRUPO I

Questão 1 A seguinte função calcula a $n+1$-ésima linha do triângulo de Pascal

```
pascal 0 = [1]
pascal (n+1) = 1:(soma (pn,(tail pn)))
        where pn = pascal n

soma ([],x) = x
soma (x,[]) = x
soma ((a:as),(b:bs)) = (a+b):(soma (as,bs))
```

Por exemplo, `pascal 0` é a lista `[1]`, `pascal 2` é a lista `[1, 2, 1]`, *etc.*, *cf.*

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

1. Qual o tipo da função `soma`? Exprima essa função como um anamorfismo.
2. Uma outra forma de definir a função `pascal` seria:

   ```
   pascal 0 = [1]
   pascal (n+1) = 1:(soma ((pascal n) ,(tail(pascal n))))
   ```

   Estas duas soluções correspondem a usar dois hilomorfismos sobre estruturas de dados diferentes. Quais são estas estruturas?

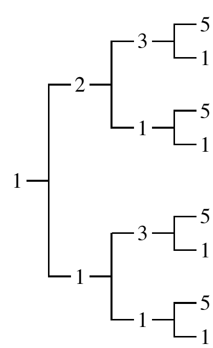
Questão 2 Responda às seguintes alíneas:

1. Preencha as reticências do diagrama funcional que se segue:

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdots \\
\cdots & \cdots \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \cdots \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
\cdots \arrow[u, "\pi_1"] \arrow[uurr, bend left, "\pi_2"] & \cdots \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[u, "f"'] \arrow[ur, "g"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

2. Exprima g e f como "splits" envolvendo outras funções no diagrama. De seguida, escreva f em HASKELL com variáveis, isto é, sem recorrer ao construtor "split" e às projecções π_1 e π_2.
3. Que função f sua conhecida é que o diagrama define? Qual é a sua inversa? Justifique.

Questão 3 Para encontrar todos os divisores de um dado número, é vulgar recorrer-se a uma árvore n-ária construída com base nos factores primos desse número, procedendo-se depois à multiplicação dos elementos que fazem parte dos diferentes "caminhos" da árvore. Por exemplo, ao número 30 corresponde a árvore seguinte:



A multiplicação dos elementos dos seus vários "caminhos" dá como resultado $1, 5, 3, 15, 2, 10, 6, 30$, i.é, todos os divisores de 30.

Considere o seguinte tipo indutivo que define a estrutura de uma árvore tal n-ária não vazia

```
data XTree a = XLeaf a | XCons (a , [XTree a])
```

a cujos catamorfismos corresponde o diagrama que se segue:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{XTree}\ A \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & A + A \times [\,\mathsf{XTree}\ A\,] \arrow[l, "in"'] \arrow[d, "id+id\times map\ (\!|g|\!)"] \\
[\,[\,A\,]\,] & A + A \times [\,[\,[\,A\,]\,]\,] \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

1. Complete a seguinte definição de uma função que deverá calular todos os caminhos de uma árvore $\mathsf{XTree}\ A$:

   ```
   traces = cataXTree (either ... ...)
   ```

2. Suponha que alguém já programou um anamorfismo $I\!N \xrightarrow{f} \mathsf{XTree}\ I\!N$ que, dado um número $n \in I\!N$, constroi a respectiva árvore de primos. Defina então uma função $I\!N \xrightarrow{g} [\,I\!N\,]$ que lhe permita obter a lista dos divisores de um dado número $n \in I\!N$.

Questão 4 Nesta disciplina estudou-se um método de programação que estende a tipos indutivos polinomiais algumas construções já conhecidas de PP-I como, por exemplo, `map` e `fold`. Contudo, em lugar de `folds` falou-se de `catas`. Isto porque de um `cata` se obtém facilmente o respectivo `fold` "desdobrando" o seu "gene" nos seus componentes, explicitando constantes e fazendo o "currying" dos operadores com mais de um argumento — por exemplo:

```
foldRList u f = cataRList (either (const u) (uncurry f))
```

Defina `foldLTree` e `foldBTree`.

Questão 5 Considere a seguinte definição de uma função t, em HASKELL:

```
t f g h k = [ either (split f g)(split h k),split (either f h)(either g k) ]
```

Qual é o tipo de t? Justifique convenientemente a sua resposta.

Questão 6 Caracterize a função que é definida por $(\!|[\underline{[\,]}, h]|\!)$ para cada uma das seguintes definições de h:

$$h(x,(y_1,y_2)) = y_1 +\!\!+ [x] +\!\!+ y_2 \quad (1)$$

$$h = +\!\!+ \cdot (\mathit{singl} \times +\!\!+) \quad (2)$$

$$h = +\!\!+ \cdot (+\!\!+ \times \mathit{singl}) \cdot \mathit{swap} \quad (3)$$

assumindo $\mathit{singl}\ a = [a]$. Qual é o tipo de dados em jogo? Justifique.

Anexo–Cálculo de Funções

COMPOSIÇÃO

Natural-id	$f \cdot id = id \cdot f = f$	(4)
Associatividade	$(f \cdot g) \cdot h \quad = \quad f \cdot (g \cdot h)$	(5)

PRODUTO

Universal-$\times$	$k = \langle f, g \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$	(6)
Cancelamento-$\times$	$\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \quad , \quad \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g$	(7)
Reflexão-$\times$	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \quad = \quad id_{A \times B}$	(8)
Fusão-$\times$	$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$	(9)
Absorção-$\times$	$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$	(10)
Functor-$\times$	$(g \cdot h) \times (i \cdot j) \quad = \quad (g \times i) \cdot (h \times j)$	(11)
Functor-id-$\times$	$id_A \times id_B \quad = \quad id_{A \times B}$	(12)

COPRODUTO

Universal-$+$	$k = [f, g] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$	(13)
Cancelamento-$+$	$[g, h] \cdot i_1 = g \quad , \quad [g, h] \cdot i_2 = h$	(14)
Reflexão-$+$	$[i_1, i_2] \quad = \quad id_{A+B}$	(15)
Fusão-$+$	$f \cdot [g, h] = [f \cdot g, f \cdot h]$	(16)
Absorção-$+$	$[g, h] \cdot (i + j) = [g \cdot i, h \cdot j]$	(17)
Functor-$+$	$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g + i) \cdot (h + j)$	(18)
Functor-id-$+$	$id_A + id_B = id_{A+B}$	(19)

EXPONENCIAÇÃO

Universal	$k = \overline{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = ap \cdot (k \times id)$	(20)
Cancelamento	$f = ap \cdot (\overline{f} \times id)$	(21)
Reflexão	$\overline{ap} = id_{B^A}$	(22)
Fusão	$\overline{g \cdot (f \times id)} = \overline{g} \cdot f$	(23)
Absorção	$\overline{f \cdot g} = f^A \cdot \overline{g}$	(24)
Functor	$(g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A$	(25)
Functor-id	$id^A = id$	(26)

MISC.

Lei da troca	$[\langle f, g \rangle, \langle h, k \rangle] \quad = \quad \langle [f, h], [g, k] \rangle$	(27)