Universidade do Minho

2005/2006	1.º Semestre ☐ 2.º Semestre ☒ Anual ☐
DISCIPLINAS Métodos Formais de Programação II (7008N2) + Opção II — Métodos Formais de Programação II (5308P3) CURSOS LMCC + LESI	DOCENTE J.N. Oliveira – 406006

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.02.20 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Apresentação da disciplina. Equipa docente. Programa da disciplina e seu enquadramento no plano de estudos. Regime de avaliação. Trabalho opcional. Bibliografia. Informação electrónica sobre a disciplina: `www.di.uminho.pt/~jno/html/mii.html`. *Introdução:* A "equação de Wirth" [9] *Algorithms + Data Structures = Programs* e o binómio *especificação* / *implementação*. Necessidade de eficiência. Eficiência das implementações *versus* clareza das especificações. Noçao de *detalhe* de implementação. Múltiplas implementações para a mesma especificação (modelo). Necessidade de estratégias (ordens) para o refinamento. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.02.27 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Não houve aula (aula a compensar logo que possível). O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.02.27 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (aula a compensar logo que possível). O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.03.06 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Revisões de *Métodos Formais de Programação I*: prática em modelação VDM: • Caso de estudo `ECTSs` — formulação do invariante do modelo. *(v.s.f.f.)*

(cont.)

Exercício 1. Demonstrar a implicação

$$f \cdot r \quad = \quad id \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ é sobrejectiva e } r \text{ é injectiva} \tag{1}$$

Sugestão: começar por $r \subseteq f^\circ$

$\square$

Exercício 2. [Transformada-PF]

- Converter para variáveis e interpretar as expressões

$$f \cdot \leq \quad \subseteq \quad \sqsubseteq \cdot g \tag{2}$$

$$f^\circ \cdot \leq \quad = \quad \sqsubseteq \cdot g \tag{3}$$

  onde $\leq$ e $\sqsubseteq$ são ordens. *Sugestão:* aplique a *regra do guardanapo* (214) sempre que possível.

- Mostrar que se se fizer $\leq := id$ em (2), esta expressão traduz a ordem *ponto-a-ponto* entre funções (216).

$\square$

O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.03.06 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Introdução ao refinamento de modelos:* Princípios gerais de substituição de um modelo por outro. **Nível algorítmico**: relação de satisfação (substituição, ou refinemento). A tradicional ordem *s menos definido do que r* entre autómatos de estados finitos (vistos como funções de estado actual para estados sucessores): $$s \vdash r \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad \langle \forall\, a \;:\; (s\ a) \supset \emptyset :\; \emptyset \subset (r\ a) \subseteq (s\ a) \rangle \tag{4}$$ **Nível dos dados**: necessidade de mudança de formato dos dados. Caso mais simples: formatos isomorfos. Relaxe da relação de isomorfismo $A \cong B$ à relação $A \leq B$ captando o facto de A ter menos informação que B. Relações de abstracção (simples + sobrejectivas) e de representação (injectivas e inteiras). Assim: isomorfismo f° (converso de f), ambos tais que $\mathsf{img}\ f = id$ e $\mathsf{ker}\ f = id$ é relaxado a r tal que $f \cdot r = id$, deixando de ser exigido $r \cdot f = id$. O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.03.13 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Conclusão dos exercícios da aula anterior. Prática em modelação VDM: • Caso de estudo `HTable` — modelo de tabelas de "hashing" (variante *listas de colisões*) • `Htable` vista como refinemento de `Collection` — funções de abstracção e de representação. O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.03.13 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados :* lei da representação por "*apontador*": $$A \leq A+1 \quad (5)$$ Estudo do isomorfismo de totalização de correspondências: $$A \rightharpoonup B \cong (B+1)^A \quad (6)$$ Início do estudo do repertório de *inequações de refinamento* e respectivas funções de abstracção e de representação: $$\mathcal{P}A \leq A^\star \quad (7)$$ $$\mathcal{P}A \leq \mathbb{N} \rightharpoonup A \quad (8)$$ $$\mathcal{P}A \leq A \rightharpoonup B \quad (9)$$ $$\mathcal{P}A \leq A \rightharpoonup \mathbb{N} \quad (10)$$ O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.03.20 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Conclusão de alguns exercícios pendentes. Refinamento: cálculo do inverso do isomorfismo $split$ assciado à lei $$(B \times C)^A \cong B^A \times C^A \quad (11)$$ Prática em modelação VDM: • Caso de estudo `ECTSs` — formulação dos invariantes de *integridade referencial* e de duas funcionalidades. O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.03.20 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento de dados por cálculo (cont.) :* Estudo do repertório de *inequações de refinamento* e respectivas funções de abstracção e de representação: $$A \rightharpoonup B \times C \leq (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C) \quad (12)$$ $$(B+C) \rightharpoonup A \cong (B \rightharpoonup A) \times (C \rightharpoonup A) \quad (13)$$ $$A \rightharpoonup (B+C) \leq (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C) \quad (14)$$ $$(A \rightharpoonup B)^C \cong (C \times A) \rightharpoonup B \quad (15)$$ A projecção relacional (238) e seu caso particular para relações simples $f \rightharpoonup g$ que é usado em funções de abstração/representação. *(v.s.f.f.)*

(cont.)	Apresentação da lei $$A \rightharpoonup D \times (B \rightharpoonup C) \quad \leq \quad (A \rightharpoonup D) \times ((A \times B) \rightharpoonup C) \qquad (16)$$ O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.03.27 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Cálculo da simplicidade de uma projecção $\pi_{g,f} R$ (238) e sua relação com dependências funcionais em bases de dados. Projecções de relações simples. A notação $f \rightharpoonup g = \pi_{g,f}$ para f injectiva. Introdução ao VDM++. Exemplo: os modelos `stackAlg.vpp` e `stackObj.vpp`. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.03.27 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento de dados por cálculo :* Propriedades da relação $\leq$: reflexividade e transitividade e suas provas. Relacionadores (*relators*) e o refinamento estruturado. Análise detalhada das representações e abstracções das leis estudadas até ao momento. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.04.03 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Apresentação do tema proposto para o projecto da disciplina. Exercícios de refinamento relacional dos modelos $BAMS$ e $ECTS$ de *Métodos Formais de Programação I.* O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.04.03 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.) :* Introdução ao refinemento de modelos de dados recursivos. Necessidade de *hilomorfismos* relacionais para exprimir abstracções e representações. O hilomorfismo $[\![R, S]\!]$ como solução da equação relacional $$X = R \cdot \mathsf{F}\, X \cdot S$$ Exemplos introdutórios: "fold" de conjuntos e de *mappings*. *Introdução ao cálculo de pontos-fixos :* Funções monótonas, pré/pós-pontos-fixos. Teorema de Tarski. Notação μ. Resolução de equações relacionais. Casos típicos: hilo-equações $X = \underbrace{R \cdot (\mathsf{F}\, X) \cdot S}_{f\ X}$ e outras, por exemplo, $$X = \underbrace{R \cup R \cdot X}_{g\ X}$$ (cf. fecho transitivo.) O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.04.10 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Demonstração das propriedades "functoriais" da projecção relacional $$id \rightharpoonup id = id \quad (17)$$ $$id \rightharpoonup (g \cdot h) = (id \rightharpoonup g) \cdot (id \rightharpoonup h) \quad (18)$$ Continuação dos exercícios de refinamento relacional da aula anterior. Conversão do modelo ECTS para diagrama entidades-relações. Exercícios de especificação recursiva sobre modelos com funções parciais finitas. O caso de estudo FS ("file system"). O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.04.10 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Teorema da *fusão-μ:* para h, g monótonas e $f^\flat$ adjunta-inferior, $$f^\flat(\mu h) = \mu g \quad \Leftarrow \quad f^\flat \cdot h = g \cdot f^\flat \quad (19)$$ (20) Aplicações: prova de $$[\![S, R]\!]^\circ = [\![R^\circ, S^\circ]\!]$$ e das leis de fusão-hilo: *(v.s.f.f.)*

(cont.)	$$V \cdot [\![S, R]\!] = [\![T, R]\!] \quad \Leftarrow \quad V \cdot S = T \cdot (\mathsf{F}\,V)$$ $$[\![S, R]\!] \cdot V = [\![S, U]\!] \quad \Leftarrow \quad R \cdot V = \mathsf{F}\,V \cdot U$$ Os tipos colectivos de dados em VDM-SL e seus hilomorfismos. O tipo `map` A `to` B. O tipo `set of` A e a notação $\{\!|g|\!\}$. Catamorfismos relacionais. Predicados indutivos vistos como catamorfismos coreflexivos. O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.04.24 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Não houve aula (aula a compensar logo que possível). O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.04.24 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (aula a compensar logo que possível). O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.05.08 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Resolução dos exercícios seguintes, onde as funções, relações e tipos de dados do módulo `mii0506.vdm` que se referem podem ser procuradas consultando o anexo *Function/Method Cross-Reference Index* que é gerado automaticamente: **Exercício 3.** Procure a função $puts$ e as relações $Puts$ e $Listify'$. 1.Mostre que $Puts$ é simples. 2.Desenhe o diagrama do anamorfismo relacional $Listify' = [\!(Ins^\circ)\!]$, onde $Ins \stackrel{\rm def}{=} [\underline{\emptyset}\ , Puts]$. 3.Mostre — recorrendo às leis (240) a (256) — que $$Listify' \subseteq elems^\circ \qquad (21)$$ onde $elems$ (primitiva em VDM-SL) é o catamorfismo $(\![[\underline{\emptyset}\ , puts]]\!)$. 4.De (21) infere-se $elems \cdot Listify' \subseteq id$. Contudo, $Listify' \cdot elems \subseteq id$ não se verifica. Porquê? Apresente um contra-exemplo. □ *(v.s.f.f.)*

(cont.)

Exercício 4. Especifique em notação VDM-SL a função (recursiva) tar. Mostre que tar não é um isomorfismo. $\square$

Exercício 5. [Transformada-PF] Mostre, usando (235), que a reflexão-$+$ (236) de um coproduto $A + B$ é quivalente a

$$\mathsf{img}\, i_1 \cup \mathsf{img}\, i_2 = id \tag{22}$$

por sua vez equivalente a

$$\left\langle \begin{array}{c} \forall\, x \ : \\ x \in A + B : \\ \langle \exists\, a \ : \ a \in A : \ x = i_1\, a \rangle \\ \vee \\ \langle \exists\, b \ : \ b \in B : \ x = i_2\, b \rangle \end{array} \right\rangle \tag{23}$$

o que capta bem a ideia da união disjunta de A e B retida em $A + B$. $\square$

O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 06.05.08 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Polimorfismo paramétrico — porquê e para quê? Teorema "grátis" de um tipo polimórfico t. Operador de Reynolds:

$$f(R \leftarrow S)g \quad \equiv \quad f \cdot S \subseteq R \cdot g$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & B \arrow[l, "S"'] \arrow[d, "g"] \\ C & D \arrow[l, "R"] \end{tikzcd}$$

Exemplos. Teorema "grátis" do operador $(\!|\_|\!)$

$$f \cdot \mathsf{B}\,\langle R, S\rangle \subseteq S \cdot g \quad \Rightarrow \quad (\!|f|\!) \cdot \mathsf{F}\, R \subseteq S \cdot (\!|g|\!)$$

e seus corolários. Leis de fusão e de absorção.

O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.05.15 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Não houve aula (tolerância do Enterro da Gata). O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2006.05.15 2.ª feira, 14h00-16h00 (Aula suplementar)	*Refinamento formal de dados (cont.) :* Teorema de desrecursivação genérica:

$$\mu\mathsf{F} \quad \leq \quad (K \rightharpoonup \mathsf{F}\, K) \times K \tag{24}$$

(v.s.f.f.)

(cont.)	Exemplos: desrecursivação do tipo de dados $Exp \cong A + B \times Exp^{\star}$. Primeira análise da desrecursivação do modelo $GenDia :: \quad indiv : \; token$ /*data about an individual */ $mother : \; [GenDia]$ $father : \; [GenDia]$ Estudo da função de abstracção de abstracção associada a (24): $\sim f(M, k) \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; [\![M]\!]k$ (25) Início do estudo do respectivo invariante concreto. Relações de pertença estrutural ($\in_{\mathsf{F}}$) e acessibilidade estrutural ($\prec_{\sigma}$). O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.05.22 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Resolução de exercícios sobre *teoremas grátis* e desrecursivação de modelos: **Exercício 6.** No contexto do processo de desrecursivação do modelo $GenDia$ da aula anterior, calcule a função de abstração associada ao passo de desrecursivação (exprimindo-a em notação VDM-SL). □ **Exercício 7.** Após calcular o teorema grátis do tipo de $sort : a^{\star} \leftarrow a^{\star} \leftarrow (2 \leftarrow (a \times a))$ $nub : a^{\star} \leftarrow a^{\star} \leftarrow (2 \leftarrow (a \times a))$ investigue a sua instanciação para • $sort\ p$ em que p define uma ordem total e • $nub\ p$ em que p define uma equivalência □ O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 06.05.22 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Técnicas de refinamento algorítmico :* Versão-PF da definição (4): $S \vdash R \quad \equiv \quad (\mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R) \,\wedge\, (R \cdot \mathsf{dom}\, S \subseteq S)$ A *eficiência* como principal motivação para o refinamento algorítmico. Refinamento funcional — satisfação de uma especificação implícita S por uma função f: $S \vdash f \quad \equiv \quad f \cdot \mathsf{dom}\, S \subseteq S$ (26) Exemplo: resolução da equação $IsPermutation \vdash f$ *(v.s.f.f.)*

(cont.)	em ordem a f, sabendo que $IsPermutation = \mathsf{ker}\, seq2bag$, onde

$$
\begin{aligned}
seq2bag &= (\![bnil\,, bcons]\!) && (27)\\
bnil &= \underline{\{\mapsto\}} && (28)\\
bcons &= \oplus \cdot (singb \times id) && (29)\\
singb\; a &= \{a \mapsto 1\} && (30)
\end{aligned}
$$

O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.05.29 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-0.04 (LMCC+LESI)	Resolução dos exercícios seguintes:

Exercício 8. No contexto do processo de desrecursivação do modelo $GenDia$ da aula anterior, calcule

- A relação de pertença associada ao relator do respectivo tipo de dados

$$\in_{\mathsf{F}} \quad = \quad i_2^\circ \cdot \pi_2 \cup i_2^\circ \cdot \pi_3 \tag{31}$$

- A respectiva relação de accessibilidade

$$\prec_\sigma = \in_{\mathsf{F}} \cdot\, \sigma \tag{32}$$

□

Exercício 9. Completar o cálculo que se segue:

$$
\begin{array}{ll}
 & S \vdash f \\
\equiv & \quad \{ \text{ definição (26) } \} \\
 & \ldots \\
\equiv & \quad \{ \text{ Galois } \} \\
 & \ldots \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots \ \} \\
 & y(\mathsf{dom}\, S)x \quad \Rightarrow \quad y(f^\circ \cdot S)x \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots \ \} \\
 & y = x \ \wedge \ x \in \mathsf{dom}\, S \quad \Rightarrow \quad (f\ y)\ S\ x \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots \ \} \\
 & x \in \mathsf{dom}\, S \quad \Rightarrow \quad (f\ x)\ S\ x
\end{array}
$$

□

(v.s.f.f.)

(cont.)	**Exercício 10.** Aplicar o resultado do exercício anterior à verificação do facto $S \vdash id$ onde S é a especificação que se segue, escrita em VDM-SL:
	`S(n: real) r: real`
	`pre n > 1`
	`post r*r + 2*n*n = 3*n*r;`
	Será id a única implementação functional de S? Justificar informalmente. $\Box$
	
	Exercício 11. Demonstrar as seguintes propriedades da relação $\vdash$:
	$\bot \vdash f \quad , \quad \top \vdash f$ (33)
	$(S \cup R) \vdash f \;\Leftarrow\; S \vdash f \wedge R \vdash f$ (34)
	$(S \cap R) \vdash f \;\Leftarrow\; S \vdash f \wedge R \vdash f$ (35)
	$(\mathsf{ker}\, g) \vdash f \;\equiv\; g \cdot f = g$ (36)
	$g \vdash f \;\equiv\; f = g$ (37)
	$\Box$
	
	O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 06.05.29 2.ª-feira, 14h00–16h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Técnicas de refinamento algorítmico (conclusão) :* Leis do refinamento relacional — satisfação progressiva de uma especificação implícita S por outra especificação R: $S \vdash R \;\equiv\; R \cdot \mathsf{dom}\, S \subseteq S \wedge \mathsf{dom}\, S \subseteq \mathsf{dom}\, R$ (38) Propriedades de ordem parcial da relação $\vdash$. Propriedade de F-monotonia. O refinamento funcional $f \vdash g$ e a procura de eficiência. Leis de fusão "vertical" de processos algorítmicos (leis functoriais, de fusão e de absorção). Leis de fusão "horizontal" de processos algorítmicos. A lei de Fokkinga (257) e o seu corolários "banana-split" (258). Cálculo de ciclos `for/while` (250) a partir do hilomorfismo genérico (251) $f : A \longrightarrow C$ $f = p \rightarrow b \,,\, \theta \cdot \langle d, f \cdot e \rangle$ Introdução de parâmetros de acumulação. Leis de factorização iterativa (252, 253). Uso do cálculo de hilomorfismos na prova de (252). Considerações finais. Encerramento da disciplina. Preenchimento dos inquéritos de avaliação das aulas teóricas e práticas. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2006.05.31 4.ª feira, 14h00-16h00 (Aula suplementar)	Resolução dos exercícios seguintes relativos à factorização iterativa de hilomorfismos:

Exercício 12. Identifique que lei (252) ou (253) foi aplicada para se obter, em VDM-SL, os pares de funções que se seguem e reconstitua o esquema linear de que se partiu em cada caso:

```
h(y) == haux( 1, y);
haux(b, y) ==
if y = [] then b else haux( b * hd y , tl y);

g(f, y) == gaux(f, {}, y);
gaux(f, b, y) ==
if y = {}
then b
else let x in set y in gaux(f, {f(x)} union b , y \
{x});

f(y) == faux(1, y);
faux(b, y) == if y = 0 then b else faux(y * b , y -1);

j(x, y) == jaux(x, false, y);
jaux(x, b, y) ==
if y = [] then b else jaux(x, (x = hd y) or b , tl y);
```

Isto é, para cada caso identifique os parâmetros p, d, e etc em (251). □

Exercício 13. É possível mostrar que o cálculo da projecção $g \cdot M \cdot f^{\circ}$, em que M é um *mapping* finito e f é injectiva, se pode fazer em VDM-SL através do hilomorfismo

```
proj(g)(f)(M) ==
    if M = {|->}
    then {|->}
    else let a in set dom M
       in {f(a) |-> g(M(a))} munion
       proj(g)(f)({a} <-:  M)
```

Mostre que é possível calcular a mesma projecção de forma iterativa, isto é, sob a forma de um ciclo-`while`. □

O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO

Prática
2006.06.20
3.ª feira, 10h00-13h00
(Aula suplementar)
	Previsto
	
	Exercício 14. Verifique se a função f definida no fragmento de VDM-SL que se segue,
	
	`types`
	`BTree = [Node];`
	`Node :: item: int left: BTree right: BTree;`
	`functions`
	`f : int * BTree -> bool`
	`f(i,t) == cases t:`
	`nil -> false,`
	`mk_Node(x,l,r) -> if x = i then true else`
	`if (i < x) then f(i,l) else f(i,r)`
	`end;`
	
	está em condições de ser transformada num ciclo-while. Justifique adequadamente a sua resposta identificando eventuais lei de cálculo que tenha utilizado. □
	
	(v.s.f.f.)

(cont.)	Previsto

Previsto

Exercício 15. Recorde a lei (24) que representa estruturas indutivas sob a forma de pares *(heap, apontador)*, bem como a respectiva função de abstracção (25). Seja $K \xleftarrow{f} K$ uma função de transformação de apontadores, usada como parâmtero na seguinte operação de re-alocação de células de um *heap* (vulg. *garbagge collection*):

$$
\begin{array}{rcl}
gcol & : & (K \longrightarrow K) \longrightarrow (K \rightharpoonup \mathsf{F}\,K) \longrightarrow (K \rightharpoonup \mathsf{F}\,K) \\
gcol\ f\ M & \stackrel{\rm def}{=} & (\mathsf{F}\,f) \cdot M \cdot f^{\circ}
\end{array}
$$

É de notar que $M \cdot f^{\circ}$ tem de ser simples, já que o contrário destruiria a simplicidade do *heap* resultante. Mas — será isso suficiente?
Uma *garbagge collection* $gcol\ f\ M$ estará correcta se não destruir a representação, isto é, se

$$
F(gcol\ f\ M, f\ k) = F(M, k) \tag{39}
$$

se verificar, onde F é a abstracção (25). Complete o cálculo seguinte de uma condição que é suficiente para (39) estar garantida. E que condição é essa?

$$
\begin{array}{cl}
& F(gcol\ f M, f\ k) = F(M, k) \\
\equiv & \quad \{ \ldots \} \\
& (\!|gcol\ f M|\!)(f\ k) = (\!|M|\!)k \\
\equiv & \quad \{ \ldots \} \\
& (\!|(\mathsf{F}\,f) \cdot M \cdot f^{\circ}|\!) \cdot f = (\!|M|\!) \\
\equiv & \quad \{ \ldots \} \\
& [\![\, in, (\mathsf{F}\,f) \cdot M \cdot f^{\circ}\,]\!] \cdot f = [\![\, in, M\,]\!] \\
\Leftarrow & \quad \{ \ldots \} \\
& (\mathsf{F}\,f) \cdot M \cdot f^{\circ} \cdot f = (\mathsf{F}\,f) \cdot M \\
\Leftarrow & \quad \{ \ldots \} \\
& f^{\circ} \cdot f = id
\end{array}
$$

□

Exercício 16. Estude a semântica da construção

```
for id = e1 to e2 by e3 do s
```

(pág. 86 do manual de VDM-SL) e represente-a sob a forma de um hilomorfismo. □

(v.s.f.f.)

(cont.)

Previsto

Exercício 17. Complete a seguinte prova de (222), onde se assume S é simples:

$$
\begin{array}{ll}
& S \cdot R \subseteq T \\
\Rightarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (\mathsf{ker}\, S) \cdot R \subseteq S^{\circ} \cdot T \\
\Rightarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (\mathsf{dom}\, S) \cdot R \subseteq S^{\circ} \cdot T \\
\Rightarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& S \cdot (\mathsf{dom}\, S) \cdot R \subseteq S \cdot S^{\circ} \cdot T \\
\Rightarrow & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& S \cdot R \subseteq T
\end{array}
$$

□

Exercício 18. Especifique em notação VDM-SL a conversa $tarx$ de tar. Exprima-as como hilomorfismos, isto é, identifique S e S° no diagrama

$$
\begin{tikzcd}
FS \arrow[r, "out"] \arrow[d, "tar"'] & Id \rightharpoonup (File + FS) \arrow[d, "id \rightharpoonup (id + tar)"] \\
Paths & Id \rightharpoonup File + Paths \arrow[l, "S"]
\end{tikzcd}
$$

□

Exercício 19. Aprecie, no modelo $ECTS$, a adição da relação $topics$ (já anunciada na aula anterior) e o invariante $topicsOk$. Se tivesse que especificar que uma dada $u.topics$ é acíclica, como o faria? □

Exercício 20. Com base nas propriedades (237) e (233), prove que $[\_\ ,\_]$ preserva abstracções e que $\langle \_, \_ \rangle$ preserva representações. Isto é, mostre que $\langle R, S \rangle$ (resp. $[R\ , S]$) é uma relação de representação (resp. abstracção) sempre que R e S individualmente o são. □

O DOCENTE ____________________