Métodos Formais de Programação I +
Opção I - Métodos Formais de Programação I

4.º Ano da LMCC (7007N2) + LESI (5307P2)
Ano Lectivo de 1995/96

Exame (Época de Recurso) — 12 de Setembro 1996
14h30
Sala 2301

NB: *sempre que os seus cálculos utilizarem resultados, leis, teoremas* etc. *disponíveis no material pedagógico desta disciplina não os copie para a sua folha de exame — limite-se a citar a sua referência (*e.g. *lei (2.102), exercício 2.15,* etc.*).*

PROVA COM CONSULTA (3 $horas$)

Questão 1 Considere os operadores seguintes,

$$\begin{array}{rcl}
\sigma_1 & : & s_3 \times s_1 \rightarrow s_1 \\
\sigma_2 & : & s_2 \times s_1 \rightarrow s_1 \\
\sigma_3 & : & \rightarrow s_1 \\
\sigma_4 & : & s_6 \rightarrow s_4 \\
\sigma_5 & : & s_6 \rightarrow s_2 \\
\sigma_6 & : & s_2 \times s_4 \rightarrow s_3 \\
\sigma_7 & : & s_5 \rightarrow s_6 \\
\sigma_8 & : & s_1 \rightarrow s_1 \\
\sigma_9 & : & s_5 \times s_6 \rightarrow s_6 \\
\sigma_{10} & : & s_2 \times s_1 \rightarrow s_1
\end{array}$$

de uma assinatura Σ que se inferiu (de acordo com a técnica estudada nesta disciplina) de uma gramática independente de contexto para gestão de uma tabela relacional em que chave e informação são 'strings' (sequências de caracteres), com a seguinte funcionalidade:

Inicialização;
Entrada de novo registo;
Marcação de chave de registo a apagar;
Empacotamento (destruição de facto *de todos os registos marcados para apagar);*
Recuperação ('undelete' de um dado registo, conhecida a sua chave).

1. Tente reconstituir as produções da gramática em causa (a escolha dos símbolos terminais *etc.* é, obviamente, sua).
2. Indique qual é a frase dessa linguagem que corresponde ao seguinte $\Sigma(X)$-termo:
$$\sigma_1(\sigma_6(k, i), \sigma_8(\sigma_2(k, x)))$$
3. Especifique um modelo $\mathcal{A} : \Sigma \rightarrow Sets$ que capte formalmente a semântica dessa linguagem.

Questão 2 Recorde os operadores sobre sequências $a \frown b$ (concatenação de a e b) e $invl(a)$ (inversão de a). Mostre que esses operadores comutam entre si da forma seguinte:

$$invl(a \frown b) = invl(b) \frown invl(a)$$

Sugestão: faça indução sobre a (sequências) e recorde as leis seguintes, para $x \neq <>$:

$$head(x \frown y) = head(x) \tag{1}$$
$$tail(x \frown y) = (tail(x)) \frown y \tag{2}$$

Questão 3 Uma das operações mais primitivas de um pacote de 'data mining' é aquela que permite aglutinar ou sumariar dados numéricos de acordo com critérios vários de classificação. Por exemplo, sejam dados três quadros,

Mês	**Total** ($\times 10^6$\$00)
Janeiro	21
Fevereiro	10
Março	9
Abril	15
Maio	9
Junho	9
Julho	10
Agosto	12
Setembro	7
Outubro	5
Novembro	3
Dezembro	30

(a) — Vendas

Mês	**Estação**
Janeiro	Inverno
Fevereiro	Inverno
Março	Primavera
Abril	Primavera
Maio	Primavera
Junho	Verão
Julho	Verão
Agosto	Verão
Setembro	Outono
Outubro	Outono
Novembro	Outono
Dezembro	Inverno

(b) — Critério "Estação"

Mês	**Vendedor**
Janeiro	A
Fevereiro	A
Março	B
Abril	B
Maio	C
Junho	C
Julho	A
Agosto	A
Setembro	B
Outubro	B
Novembro	C
Dezembro	C

(c) — Critério "Vendedor"

em que: (a) corresponde à relação de vendas, por mês, de uma dada firma comercial; (b) corresponde ao critério que classifica meses em estações do ano; e (c) corresponde ao critério que relaciona meses com os 3 vendedores da firma.

As duas tabelas que se seguem correspondem à aglutinação de (a) seguindo, respectivamente, o critério (b) e o critério (c):

Estação	**Total** ($\times 10^6$\$00)
Inverno	61
Primavera	33
Verão	31
Outono	15

(d) — Critério "Estação"

Vendedor	**Total** ($\times 10^6$\$00)
A	53
B	36
C	51

(e) — Critério "Vendedor"

Repare que as tabelas (a), (d) e (e) são multiconjuntos de tipo genérico

$$MSet(A) \quad \cong \quad A \hookrightarrow \mathbb{N}$$

e as tabelas (b) e (c) são funções de classificação de tipo genérico

$$A \hookrightarrow B$$

1. Especifique formalmente a função $msetTot : MSet(A) \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que calcula o total das multiplicidades de um multiconjunto.
2. Especifique formalmente a função

$$\begin{aligned} msetAgl \quad &: \quad MSet(A) \times (A \hookrightarrow B) \longrightarrow MSet(B) \\ msetAgl(ms, f) \quad &\stackrel{\text{def}}{=} \quad \ldots \end{aligned}$$

que realiza a operação de aglutinação que acima se ilustrou.

3. Demonstre ou refute o facto seguinte sobre essa função:

$$msetAgl(ms, ms) \quad = \quad id$$

onde id representa a função identidade no conjunto relevante (qual?).

Questão 4 Considere a seguinte especificação do modelo $SGIB$ (sistema de gestão de uma instituição bancária), que conhece das aulas teóricas desta disciplina, agora acrescentado por forma a poder registar transacções de depósito e levantamento por cheque:

$$\begin{array}{rcll}
SGIB & \cong & IdConta \hookrightarrow Status & \\
Status & \cong & H : 2^{Titular} & \times \\
 & & B : \mathbb{Z} & \times \quad \textit{/*saldo anterior */} \\
 & & W : NrCheq \hookrightarrow Cheque & \times \quad \textit{/*levantamentos (cheques) */} \\
 & & C : 2^{Credito} & \quad\;\; \textit{/*depósitos */} \\
Cheque & \cong & D : Data & \times \quad \textit{/*data do cheque */} \\
 & & C : \mathbb{N}_0 & \quad\;\; \textit{/*quantia levantada */} \\
Credito & \cong & D : Data & \times \quad \textit{/*data do depósito */} \\
 & & B : Balcao & \times \quad \textit{/*balcão do depósito */} \\
 & & C : \mathbb{N}_0 & \quad\;\; \textit{/*quantia depositada */} \\
Data & \cong & \mathbb{N} &
\end{array}$$

Suponha atómicas (*e.g.* alfanuméricas) as espécies não definidas e repare que, para simplificar, a espécie $Data$ é modelada por naturais (*e.g.* 19960909 modela "9 de Setembro de 1996"). Repare ainda que o saldo anterior da conta é um inteiro (negativo se o saldo estiver "a descoberto").

Especifique a função $clear : SGIB \times IdConta \times Data \longrightarrow SGIB$ que apaga de uma conta todos os movimentos (crédito ou débito) anteriores a uma dada data, actualizando convenientemente o saldo anterior. (**Sugestão:** defina as funções auxiliares que lhe parecerem convenientes.)

Questão 5 Considere a definição recursiva $x = f(x)$ que é dada pela equação seguinte

$$x = 1_P \cup R \cup x^{-1} \cup R \circ x$$

em $2^{P \times P}$ (relações binárias sobre um conjunto P não vazio), onde $R \subseteq P \times P$, 1_P designa a relação $\{\langle p, p\rangle \mid \; p \in P\}$ e $x^{-1} = \{\langle q, p\rangle \mid \; (p, q) \in x\}$.

Calcule μf para $R = \emptyset$ e mostre que, para qualquer R, $P \times P$ é o maior de todos os pontos-fixos de f.

Questão 6 Seja $Term$ a espécie de dados "termo com variáveis" que a seguir se define:

$$\begin{array}{rcl}
Term & \cong & Var + Exp \\
Exp & \cong & Op \times Term^*
\end{array}$$

onde as espécies Var (símbolo de variável) e Op (símbolo de operador) são atómicas. Complete a definição seguinte que testa se dois termos t e t' em $Term$ são *unificáveis*, no sentido da inferência por *resolução* usada em PROLOG:

$$unif(t, t') \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{lcl}
\text{is-}Var(t) \vee \text{is-}Var(t') & \Rightarrow & V \\
\text{is-}Exp(t) \wedge \text{is-}Exp(t') & \Rightarrow & \ldots
\end{array} \right.$$

NB: $unif$ deverá seguir o famoso *algoritmo de unificação* de Robinson (1965), segundo o qual dois termos são unificáveis se e só se

- um deles for uma variável
- ambos forem expressões com o mesmo operador (e a mesma aridade, portanto) cujos subtermos sejam, por sua vez, unificáveis dois a dois.
