Métodos Formais de Programação I

4.º Ano da LMCC (701067) + LESI (531360)
Ano Lectivo de 1995/96

Exame (2.ª chamada) de Fevereiro 1996
9h30
Sala 2322

NB: *sempre que os seus cálculos utilizarem resultados, leis, teoremas* etc. *disponíveis no material pedagógico desta disciplina não os copie para a sua folha de exame — limite-se a citar a sua referência (*e.g. *lei (2.102), exercício 2.15,* etc.*).*

PROVA COM CONSULTA (3 $horas$)

Questão 1 O quadro que se segue descreve duas transformações conhecidas para resolver conflitos LL(1) em gramáticas independentes de contexto:

Transformação ($G \longrightarrow G'$)	**Antes** (G)	**Depois** (G')
Factorização à esquerda	$\langle A \rangle \quad ::= \quad \alpha\beta \mid \alpha\gamma$	$\langle A \rangle \quad ::= \quad \alpha\langle A' \rangle$ $\langle A' \rangle \quad ::= \quad \beta \mid \gamma$
Eliminação de recursividade à esquerda	$\langle A \rangle \quad ::= \quad \langle A \rangle\alpha \mid \beta$	$\langle A \rangle \quad ::= \quad \beta\langle A' \rangle$ $\langle A' \rangle \quad ::= \quad \alpha\langle A' \rangle \mid \epsilon$

Caracterize e comente as correspondentes transformações entre as assinataturas Σ_G e $\Sigma_{G'}$.

Questão 2 Dada uma aplicação $f : A \longrightarrow B$, $S \subseteq A$ e $s \in A^*$, relembre os "filtros" $f[S]$ — (1.22) da pág. 23 da sebenta — e $<f(a) \mid a \leftarrow s>$ — (1.27) da pág. 25 da sebenta. Vamos defini-los pela notação alternativa que se segue:

$$\begin{array}{rcl} 2^f & : & 2^A \longrightarrow 2^B \\ 2^f(S) & \stackrel{\text{def}}{=} & f[S] \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} f^* & : & A^* \longrightarrow B^* \\ f^*(s) & \stackrel{\text{def}}{=} & <f(a) \mid a \leftarrow s> \end{array}$$

Sobre f podemos ainda definir, em $Sets$, a construção $X \hookrightarrow f$, como se segue:

$$\begin{array}{rcl} X \hookrightarrow f & : & (X \hookrightarrow A) \longrightarrow (X \hookrightarrow B) \\ (X \hookrightarrow f)(\sigma) & \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\begin{array}{c} a \\ f(\sigma(a)) \end{array} \right)_{a \in dom(\sigma)} \end{array}$$

e, para qualquer bijecção $i : X \longrightarrow Y$, ainda se define $i \hookrightarrow A$ como se segue:

$$\begin{array}{rcl} i \hookrightarrow A & : & (X \hookrightarrow A) \longrightarrow (Y \hookrightarrow A) \\ (i \hookrightarrow A)(\sigma) & \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\begin{array}{c} i(x) \\ \sigma(x) \end{array} \right)_{x \in dom(\sigma)} \end{array}$$

Demonstre ou refute os seguintes factos, que envolvem essas construções:

$$rng \circ (X \hookrightarrow f) = 2^f \circ rng \tag{1}$$

$$f^*(s) \frown f^*(r) = f^*(r \frown s) \tag{2}$$

$$dom \circ (X \hookrightarrow f) = dom \tag{3}$$

$$rng \circ (i \hookrightarrow B) = rng \tag{4}$$

Questão 3 Considere o seguinte fragmento de um modelo em que se pretende especificar o sistema de informação associado ao cálculo de classificações dos alunos de uma dada disciplina:

$$\begin{array}{rcl}
Sistema & \cong & Inscritos \times Grupos \times Notas \\
Inscritos & \cong & Nr \hookrightarrow Nome \times Curso \\
Grupos & \cong & Nr \hookrightarrow NrGrupo \\
Notas & \cong & Teoricas \times Praticas \\
Teoricas & \cong & Teste \times Exame \times Recurso \\
Teste & \cong & Nr \hookrightarrow 20 \\
Exame & \cong & Nr \hookrightarrow 20 \\
Recurso & \cong & Nr \hookrightarrow 20 \\
Praticas & \cong & NrGrupo \hookrightarrow 20
\end{array}$$

1. Em relação à seguinte função sobre $Sistema$,

   $$f(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} dom(\pi_1(\sigma)) - \bigcup_{i=1}^{3} dom(\pi_i(\pi_1(\pi_3(\sigma))))$$

   caracterize a sua funcionalidade e descreva, por (breves) palavras suas, o seu significado informal.
2. Enriqueça o modelo com as funções seguintes:
   (a) função que identifica os alunos com nota prática positiva;
   (b) função que calcula a nota final de um aluno, sabendo que:
   - o peso do trabalho prático na nota final é de 40%;
   - a nota teórica mínima é 9;
   - o trabalho prático é obrigatório, *i.é*, sem informação prática positiva o aluno reprova;
   - só pode ser feita melhoria de nota no exame de $Recurso$;

   (c) função que calcula o histograma das notas finais dos alunos que não reprovaram.

NB: Para simplificar a sua especificação, trabalhe com aritmética inteira.

Questão 4 Um orçamento é uma associação de custos a ítens a realizar, podendo certos ítens desdobrar-se em sub-ítens e assim sucessivamente. Por exemplo, o orçamento de uma obra de construção civil poderia ter o aspecto do quadro seguinte:

<table>
<tr><td>Obra de betão armado</td><td colspan="3">10000</td></tr>
<tr><td>Paredes e rebocos</td><td colspan="3">5000</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Carpintaria</td><td rowspan="2">Aberturas</td><td>Janelas e portas</td><td>3000</td></tr>
<tr><td>Portas interiores</td><td>2000</td></tr>
<tr><td>Pavimentos</td><td colspan="2">2000</td></tr>
<tr><td>Louças sanitárias etc.</td><td colspan="3">1000</td></tr>
<tr><td>Pavimentos</td><td colspan="3">2000</td></tr>
</table>

Suponha que alguém definiu o seguinte modelo matemático recursivo para orçamentos,

$$\begin{array}{rcl}
Orc & \cong & Item \hookrightarrow (\mathbb{N} + SubOrc) \ \ \text{/*}\mathit{Orc\ =\ `orçamento'}\text{ */} \\
SubOrc & \cong & Orc \ \ \text{/* }\mathit{SubOrc\ =\ sub\text{-}orçamento}\text{ */}
\end{array}$$

onde $Item$ é uma entidade atómica para identificação de ítens orçamentais.

1. Complete a seguinte especificação de um operador sobre Orc que deverá calcular o valor total de um orçamento:

   $$\begin{array}{rcl}
   total & : & Orc \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\
   total(\sigma) & \stackrel{\text{def}}{=} & \ldots
   \end{array}$$

2. Pretendem-se ainda especificar as seguintes operações sobre Orc:

$$\begin{array}{lcll}
\textit{rúbricas} & : & Orc \longrightarrow 2^{(Item^*)} & \text{/* rúbricas}(\sigma) \textit{ devolve o conjunto de todas rúbricas do orçamento associadas a custos, por exemplo, } \text{<Carpintaria, Aberturas, Portas interiores>, } <Pavimentos>\text{, etc. */} \quad (5) \\
cats & : & Orc \longrightarrow 2^{(Item^*)} & \text{/* } cats(\sigma) \textit{ devolve o conjunto de todas as categorias orçamentais, por exemplo, } \text{<Carpintaria, Aberturas> */} \quad (6) \\
novaSubcat & : & Orc \times Item \times Item^* \longrightarrow Orc & \text{/* } novaSubcat(\sigma, i, c) \textit{ cria } i \textit{ como subcategoria orçamental de } c\textit{, por exemplo, } i = \text{Móveis de Cozinha } \textit{e } c = \text{<Carpintaria> */} \quad (7)
\end{array}$$

Alguém observou que se pode prescindir destas especificações se forem “reutilizadas” funções semelhantes já especificadas num problema que é “isomorfo” ao presente. Identifique esse problema e as funções em causa.

Questão 5 Considere a seguinte função que especifica um tipo de inserção estritamente ordenada numa lista de naturais:

$$\begin{array}{lcl}
ins & : & \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* \\
ins(l, a) & \stackrel{\text{def}}{=} & \left\{ \begin{array}{lcll}
l = <> & \Rightarrow & <a> & \\
l \neq <> & \Rightarrow & let & h = head(l) \\
 & & & t = tail(l) \\
 & & in & \left\{ \begin{array}{lcl} a = h & \Rightarrow & l \\ a < h & \Rightarrow & cons(a, l) \\ a > h & \Rightarrow & cons(h, ins(t, a)) \end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{array}$$

Demonstre que ins preserva o invariante sobre listas que se segue:

$$\varphi(l) \stackrel{\text{def}}{=} \forall i, j \leq length(l) : i < j \Rightarrow l(i) < l(j)$$
