Métodos Formais de Programação I +
Opção I - Métodos Formais de Programação I

4.º Ano da LMCC (7007N2) + LESI (5307P6)
Ano Lectivo de 2005/06

Exame (época especial) — 3 de Outubro de 2006
10h00
Sala 3101

NB: *Esta prova consta de* ***8*** *alíneas todas com as mesma cotação.*

PROVA SEM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 Complete o cálculo que se segue da lei distributiva da divisão relacional

$$(R \cup R') \setminus S \quad = \quad (R \setminus S) \cap (R' \setminus S) \tag{1}$$

completando as necessárias justificações:

$$
\begin{array}{ll}
 & X \subseteq (R \cup R') \setminus S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (R \cup R') \cdot X \subseteq S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (R \cdot X) \cup (R' \cdot X) \subseteq S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & R \cdot X \subseteq S \ \wedge \ R' \cdot X \subseteq S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & X \subseteq R \setminus S \ \wedge \ X \subseteq R' \setminus S \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & X \subseteq (R \setminus S) \cap (R' \setminus S) \\
:: & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (R \cup R') \setminus S = (R \setminus S) \cap (R' \setminus S)
\end{array}
$$

Questão 2 Uma fila com prioridades (*priority queue*) é uma estrutura tipo FIFO (='First-In-First-Out') em que elementos com prioridade mais elevada são servidos primeiro. Por exemplo, se numa urgência hospitalar estiverem à espera três ocorrências a, b e c, tais que a chegou primeiro e tem prioridade (=gravidade) 0, b chegou a seguir com prioridade 1, e finalmente c chegou por último mas tem prioridade 4, então c será atendido primeiro, b de seguida e finalmente a.

Considere os seguintes dois modelos formais alternativos (em VDM-SL) para *fila com prioridades*,

```
PQueueA = seq of (X * nat)
```

e

```
PQueueB = map nat to seq of X;
```

onde `X` — o tipo dos objectos a enfileirar — é sinónimo de `token` e a ordem das sequências representa a ordem de chegada (ie., índices menores correspondem a chegadas mais cedo).

1. Um dos modelos acima carece de um invariante. Qual? Identifique-o e defina-o em VDM-SL.
2. Especifique — sobre o modelo `PQueueA` ou `PQueueB`, à sua escolha — a função que modela a chegada de um novo elemento e a uma fila l, com prioridade p.
3. Especifique — sobre o modelo que não escolheu na alínea anterior — a função que modela a saída do próximo elemento com mais prioridade de uma fila l.

Questão 3 Mostre que a definição relacional do condicional de McCarthy,

$$P \rightarrow R \, , \, S \quad = \quad (R \cdot \delta \, P) \cup (S \cdot \neg(\delta \, P)) \tag{2}$$

(onde, para Φ correflexiva, $\neg\Phi$ abrevia $id - \Phi$) decorre da propriedade universal:

$$P \rightarrow R \, , \, S \quad \subseteq \quad X \qquad \equiv \qquad R \cdot \delta \, P \subseteq X \quad \wedge \quad S \cdot \neg(\delta \, P) \subseteq X \tag{3}$$

Questão 4 Considere o operador de "actualização selectiva" de uma função finita, em notação VDM-SL:

```
selUp[@A,@B]: set of @A * (@B -> @B) * map @A to @B -> map @A to @B
selUp(S,f,M) == M ++ ffmap[@A,@B](f)(S <: M);
```

onde `selUp(S,f,M)` designa o 'mapping' que se obtém de `M` quando a função `f` actualiza todas as imagens no do contradomínio de `M` cujos objectos estão no conjunto `S`, e só essas.

1. Complete a definição da função

   ```
   ffmap[@A,@B]: (@B -> @B) -> map @A to @B -> map @A to @B
   ```

   que é usada na definição dada.
2. Com base na transformada-PF de `selUp`,

   $$[\![selUp \; S \; f \; M]\!] \quad \stackrel{\rm def}{=} \quad M \dagger (f \cdot M \cdot [\![S]\!]) \tag{4}$$

   mostre que, se S for o conjunto vazio, então, qualquer que seja f, o resultado do operador $selUpSfM$ é o próprio M.
   NB: recorde que o operador relacional de sobreposição $\dagger$ é um caso particular do condicional de McCarthy,

   $$M \dagger N = N \rightarrow N \, , \, M \tag{5}$$

Questão 5 Dada uma relação binária $B \xleftarrow{R} A$ e duas funções f, g tal como no diagrama que se segue,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "g"'] & A \arrow[l, "R"'] \arrow[d, "f"] \\ C & D \arrow[l, "\pi_{g,f} R"] \end{tikzcd}$$

diz-se que R satisfaz a *dependência funcional* $f \rightharpoonup g$ se e só se

$$\mathsf{ker}\,(f \cdot R^{\circ}) \subseteq \mathsf{ker}\,g \tag{6}$$

se verifica.

Sendo R a relação coreflexiva que representa relacionalmente um dado conjunto de pares T, i.é $R = [\![T]\!]$, mostre, introduzindo variáveis em (6) e fazendo os cálculos convenientes, que a dependência $\pi_1 \overset{[\![T]\!]}{\rightharpoonup} \pi_2$ se expande no seguinte predicado, escrito em VDM-SL:

```
forall t,t' in set T & t.#1 = t'.#1 => t.#2 = t'.#2
```
