Métodos Formais de Programação I +
Opção I - Métodos Formais de Programação I

4.º Ano da LMCC (7007N2) + LESI (5307P6)
Ano Lectivo de 2005/06

Exame (2.ª chamada da época normal) — 4 de Fevereiro de 2006
09h30
Salas 1301-1302

NB: *Esta prova consta de* **7** *alíneas todas com as mesma cotação.*

PROVA SEM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 Interprete com cuidado o seguinte modelo de dados escrito em VDM-SL para descrever um sistema de registo de informação académica de uma dada universidade :

```
types

Univ :: discip: map IdDiscip to Discip
        cursos: map IdCurso to ECTSs
        alunos: map IdAluno to (IdCurso * map IdDiscip to Classif);
Discip :: nome: seq of char
          creditos: ECTSs;
ECTSs = map ACient to nat1;
Classif = nat1;

IdDiscip = token;
IdCurso = token;
IdAluno = token;
ACient  = token;
```

1. Poderá um aluno estar inscrito em mais do que um curso? Justifique, e acrescente um invariante sobre `Univ` que garanta:

   (a) *que se conhecem os ECTSs de todos os cursos em que os alunos estão inscritos* ;
   (b) *que não há alunos com disciplinas feitas que são desconhecidas no sistema* .

2. Complete a especificação de uma função (parcial) que calcule o total de ECTS que um aluno já obteve em disciplinas realizadas numa dada universidade:

   ```
   totECTS : IdAluno * Univ -> nat
   totECTS(a,u) == .......................
   pre a in set dom u.alunos ......... ;
   ```

   NB: relembre, na resolução desta questão, o problema 07 (*Multisets "are" Mappings*) das aulas práticas da disciplina.

Questão 2 O produto de duas relações R e S define-se tal como para funções,

$$R \times S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle R \cdot \pi_1, S \cdot \pi_2 \rangle \qquad (1)$$

onde o *split* relacional se define por

$$\langle R, S \rangle = \pi_1^\circ \cdot R \cap \pi_2^\circ \cdot S \qquad (2)$$

isto é

$$(a,b)\langle R, S \rangle c \equiv a\, R\, c \wedge b\, S\, c \qquad (3)$$

1. Mostre que o producto relacional respeita conversos, isto é, que

$$(R \times S)^{\circ} \quad = \quad (R^{\circ}) \times (S^{\circ}) \tag{4}$$

se verifica.

2. Num exame de MP-I (2.º ano) consta a questão

Apresente, justificando todos os passos, uma prova equacional do seguinte facto, onde $assocr = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle$.

$$(id \times \pi_2) \cdot assocr = \pi_1 \times id \tag{5}$$

$\Box$

Sabendo que o produto relacional respeita a composição e recorrendo a (4) e outras propriedades que conhece, mostre que (5) é **equivalente** a

$$assocr \subseteq \pi_1 \times \pi_2^{\circ} \tag{6}$$

Questão 3 Considere o seguinte fragmento de um modelo em VDM-SL do tipo de dados `Bag` (multiconjuntos) e duas funções envolvendo multi-conjuntos:

```
types
Bag = map token to nat1

functions
subBag : Bag * Bag -> bool
subBag(M,N) == forall a in set dom M & a in set dom N and M(a) <= N(a);

mulBag : nat1 * Bag -> Bag
mulBag(n,N) == { a |-> n * N(a) | a in set dom N };
```

Recorde que, nesta disciplina, para raciocinarmos sobre *mappings* em VDM-SL aplicamos-lhes a *transformada "pointfree"* (PF) que os converte em relações (finitas) simples. Isto é, `M: map @A to @B` é transformado na relação simples $B \xleftarrow{[\![\mathtt{M}]\!]} A$ que é tal que

$$\mathtt{M} = \{a \mapsto b \mid b[\![\mathtt{M}]\!]a\} \tag{7}$$

onde

$$b[\![\mathtt{M}]\!]a \quad \equiv \quad a \text{ in set dom } \mathtt{M} \text{ and b = } \mathtt{M}\text{(a)} \tag{8}$$

Neste contexto, suponha que alguém apurou as seguintes *transformadas-PF*

$$[\![mulBag(n, M)]\!] \quad = \quad (n*) \cdot [\![M]\!] \tag{9}$$

$$[\![subBag(M, N)]\!] \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad [\![M]\!] \subseteq \leq \cdot [\![N]\!] \tag{10}$$

Considere a seguinte propriedade de multiconjuntos:

$$subBag(M, mulBag(n, M)) \quad = \quad \text{TRUE} \tag{11}$$

Apresente justificações para os passos do seguinte raciocínio que a calcula:

$$\begin{array}{ll}
& subBag(M, mulBag(n, M)) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& M \subseteq \leq \cdot (n*) \cdot M \\
\Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& id \subseteq \leq \cdot (n*) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (n*)^{\circ} \subseteq \leq \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \langle \forall\, b, a \ :: \ b(n*)^{\circ} a \Rightarrow b \leq a \rangle
\end{array}$$

$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

$\langle \forall\, b, a \;::\; b \leq n * b \rangle$

$\Leftarrow \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

$1 \leq n$

$\equiv \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}$

TRUE

Questão 4 Considere o seguinte problema de modelação em VDMSL:

De dois em dois segundos é registada informação pelo computador do painel de bordo de um veículo automóvel que permite calcular vários indicadores da condução em curso, nomeadamente a velocidade instantânea, o consumo, a distância máxima até ao próximo abastecimento, etc. Guardam-se os últimos 10 registos, por ordem inversa da cronológica:

```
Board = seq of Sample
        inv l == len l <= 10;
Sample :: kms: real
          fuel: real
```

1. Observa-se que, à medida que o veículo se desloca, aumenta o contador quilométrico e diminui o nível de *fuel* no respectivo tanque. Acrescente ao invariante de `Board` uma condição que garanta essa observação.
2. Especifique em VDM-SL a função `instSpeed : Board -> real` que dá, em *kms/hora*, a velocidade instantânea do veículo, de acordo com as duas últimas leituras (recorda-se que estas são feitas de 2 em 2 segundos).
