Métodos Formais de Programação I +
Opção I - Métodos Formais de Programação I

4.º Ano da LMCC (7007N2) + LESI (5307P6)
Ano Lectivo de 2005/06

Exame (1.ª chamada da época normal) — 25 de Janeiro 2006
14h00
Sala 2111

NB: *Esta prova consta de* **7** *alíneas todas com as mesma cotação.*

PROVA SEM CONSULTA (2 horas)

Questão 1 Considere o seguinte fragmento de um modelo em VDM-SL do tipo de dados `Bag` (multiconjuntos) e predicado `subBag` que testa a inclusão de multiconjuntos:

```
types
Bag = map token to nat1

functions
subBag : Bag * Bag -> bool
subBag(M,N) == forall a in set dom M & a in set dom N and M(a) <= N(a);

values
B1 : Bag = { mk_token("a") |-> 1, mk_token("c") |-> 2 };
B2 : Bag = { mk_token("a") |-> 2, mk_token("c") |-> 4 , mk_token("d") |-> 2 };
B3 : Bag = { mk_token("a") |-> 2, mk_token("c") |-> 1 , mk_token("d") |-> 2 };
```

1. Suponha que anima nas VDMTools o fragmento acima:

   ```
   Initializing specification ...
    done
   >> p subBag(B1,B2)
   ......
   >> p subBag(B1,B3)
   ......
   >> p subBag(B2,B2)
   ......
   >> p subBag(B2,B3)
   ......
   ```

   Preencha as reticências com o valor que o interpretador calcula, justificando.

2. Recorde que, nesta disciplina, para raciocinarmos sobre *mappings* em VDM-SL aplicamos-lhes a *transformada "pointfree"* (PF) que os converte em relações (finitas) simples. Isto é, `M: map @A to @B` é transformado na relação simples $B \xleftarrow{[\![\mathtt{M}]\!]} A$ que é tal que

   $$\mathtt{M} = \{a \mapsto b \mid b[\![\mathtt{M}]\!]a\} \tag{1}$$

   onde

   $$b[\![\mathtt{M}]\!]a \quad \equiv \quad a \text{ in set dom } \mathtt{M} \text{ and b = } \mathtt{M}\text{(a)} \tag{2}$$

   Neste contexto, suponha que alguém apurou a seguinte *transformada-PF* do predicado `subBag`,

   $$\mathtt{subBag(M,N)} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad [\![\mathtt{M}]\!] \sqsubseteq [\![\mathtt{N}]\!] \tag{3}$$

   para $\sqsubseteq$ definida como se segue,

   $$R \sqsubseteq S \quad \equiv \quad R \subseteq \leq \cdot S \tag{4}$$

   onde $\leq$ designa a ordem total entre números naturais.

Complete o seguinte processo de cálculo que confirma que (3) é de facto a transformada-PF da versão acima proposta de `subBag` a partir de (3):

$$
\begin{array}{ll}
& subBag(M, N) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (3, 4) e omitindo os parênteses } [\![\ldots]\!] \text{ para aumentar a legibilidade } \} \\
& M \subseteq \leq \cdot N \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \langle \forall\, b, a \,:\, b\, M\, a : \, b\, (\leq \cdot N)\, a \rangle \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \vdots \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \texttt{forall a in set dom M \& a in set dom N and M(a) <= N(a)}
\end{array}
$$

3. Mostre, usando (3, 4), que `subBag` define uma preordem, isto é, que

$$\texttt{subBag}(M, M) \quad \equiv \quad \text{TRUE} \tag{5}$$

$$\texttt{subBag}(M, N) \wedge \texttt{subBag}(N, U) \quad \Rightarrow \quad \texttt{subBag}(M, U) \tag{6}$$

se verificam.
NB: não se esqueça que $\leq$ designa a ordem total que conhece em números naturais.

Questão 2 Interprete com cuidado o seguinte modelo de dados escrito em VDM-SL para descrever um sistema de registo de informação académica de uma dada universidade :

```
types

Univ :: discip: map IdDiscip to Discip
        cursos: map IdCurso to ECTSs
        alunos: map IdAluno to (IdCurso * map IdDiscip to Classif);
Discip :: nome: seq of char
          creditos: ECTSs;
ECTSs = map ACient to nat1;
Classif = nat1;

IdDiscip = token;
IdCurso = token;
IdAluno = token;
ACient  = token;
Classif  = real;
```

Repare que neste modelo todas as disciplinas são opcionais: na universidade `u`, um aluno tem o seu curso `c` acabado logo que, no seu conjunto, todas as disciplinas que fez prefazem os ECTSs exigidos por `u.cursos(c)` (podendo, naturalmente, ultrapassá-los). Complete a especificação da seguinte de uma função (parcial) que deverá calcular quantos créditos faltam a um dado aluno para completar o seu curso:

```
calCred : IdAluno * Univ -> ECTSs
calCred(a,u) == ........................
pre a in set dom u.alunos ......... ;
```

NB: relembre, na resolução desta questão, o problema 07 (*Multisets "are" Mappings*) das aulas práticas da disciplina.

Questão 3 Considere o seguinte problema de modelação em VDMSL:

De dois em dois segundos é registada informação pelo computador do painel de bordo de um veículo automóvel que permite calcular vários indicadores da condução em curso, nomeadamente a velocidade instantânea, o consumo, a distância máxima até ao próximo abastecimento, etc. Guardam-se os últimos 10 registos, por ordem inversa da cronológica:

```
Board = seq of Sample
        inv l == len l <= 10;
Sample :: kms: real
          fuel: real
```

Especifique as seguintes operações sobre o modelo dado

- `update : Sample * Board -> Board` — que deverá registar uma nova leitura no sistema de bordo, 2 seg. após a última
- `stop : Board -> Board` — que deverá captar o que deve ser feito no momento em que o carro pára.

Questão 4 Uma relação binária R diz-se *difuncional* sempre que

$$R \quad = \quad R \cdot R^{\circ} \cdot R$$

se verifica.

1. Mostre que toda a relação coreflexiva é difuncional, e complete as justificações dos passos do seguinte cálculo que mostra que toda a função f é, como seria de esperar, difuncional:

$$\begin{array}{cl} & f \quad = \quad f \cdot f^{\circ} \cdot f \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & f \subseteq f \cdot f^{\circ} \cdot f \quad \wedge \quad f \cdot f^{\circ} \cdot f \subseteq f \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & f \cdot f^{\circ} \subseteq f \cdot f^{\circ} \wedge \quad f^{\circ} \cdot f \subseteq f^{\circ} \cdot f \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \text{TRUE} \end{array}$$

2. Mostre que sempre que R é difuncional se tem $(\mathsf{ker}\ R) \cdot \mathsf{ker}\ R = \mathsf{ker}\ R$ e $(\mathsf{img}\ R) \cdot \mathsf{img}\ R = \mathsf{img}\ R$.
