Especificação e Modelação

1.º Ano de Mestrado (Eng. Informática / Matemática e Computação)
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE
Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2014/15

Teste — 28 de Janeiro de 2015
15h00
Sala CPII-201

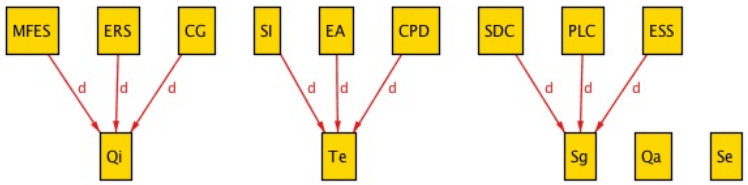
Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Este teste consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos com nota mínima no **miniteste** só podem responder à parte II (questões 5, 6, 7, 8), devendo entregar a prova ao fim de uma hora.*
- *Os restantes alunos devem responder a todas as questões, entregando a prova ao fim de duas horas.*

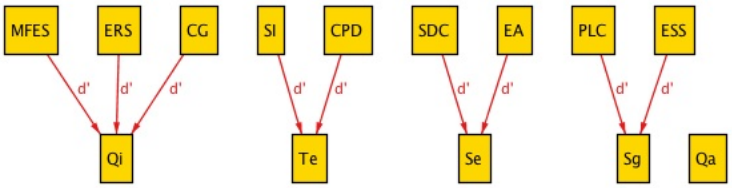
PROVA COM CONSULTA (1 ou 2 horas)

Parte I

Questão 1 Recorde a função d do modelo do problema do NOVO PLANO DE ESTUDOS DO MEI que foi abordado nas aulas desta disciplina e vem dado em anexo. Actualmente essa função é a seguinte, para os 9 perfis activos no MEI:



Suponha que, por entretanto terem surgido salas disponíveis à sexta-feira, a mesma função passa a ser:



Indique, justificando formalmente, quais das quatro situações seguintes

1. $d \leqslant d'$
2. $d' \leqslant d$
3. tanto 1 como 2
4. nem 1 nem 2

se verificam, onde a ordem

$$f \leqslant g \quad \equiv \quad \ker\, g \subseteq \ker\, f \tag{F1}$$

exprime que a função f é *menos injectiva* que a função g.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

1. $d \leqslant d'$ significa $\ker\ d' \leqslant \ker\ d$ isto é $\langle \forall\ q, p\ :\ d'\ q = d'\ p :\ d\ q = d\ p \rangle$. Não se verifica pois, por exemplo, $SDC\ (\ker\ d')\ EA$ — são ao mesmo dia em d' — e não se tem $SDC\ (\ker\ d)\ EA$ — são em dias diferentes em d.

2. $d' \leqslant d$ significa $\ker\ d \leqslant \ker\ d'$: não se verifica pois, por exemplo, $EA\ (\ker\ d)\ CPD$ — são ao mesmo dia em d — e não se tem $EA\ (\ker\ d')\ CPD$ — são em dias diferentes.

3. Falso pelos dois casos acima.

4. Verdadeiro pelos mesmos casos.

□

Questão 2 Considere a operação de subtracção (truncada) nos números naturais ($\mathbb{N}_0$)

$$a \ominus b = \textbf{if}\ b \geqslant a\ \textbf{then}\ 0\ \textbf{else}\ (a \ominus (b+1)) + 1$$

cuja estrutura algorítmica faz lembrar a da divisão inteira. De facto, é possível mostrar que $a \ominus b$ se pode **especificar** sob a forma da seguinte propriedade universal:

$$a \ominus b \leqslant x \quad \equiv \quad a \leqslant b + x \qquad \text{(F2)}$$

Use (F2) para demonstrar as igualdades

$$\begin{aligned} 0 \ominus b &= 0 \\ a \ominus 0 &= a \end{aligned}$$

sem recorrer ao algoritmo dado acima.

RESOLUÇÃO: Por igualdade indirecta nos dois casos. Primeira igualdade:

$$\begin{array}{ll} & 0 \ominus b \leqslant x \\ \equiv & \quad \{\ \text{(F2)}\ \} \\ & 0 \leqslant b + x \\ \equiv & \quad \{\ \text{como os números são naturais, } 0 \leqslant b + x \equiv 0 \leqslant x \equiv \mathit{true}\ \} \\ & 0 \leqslant x \\ :: & \quad \{\ \text{igualdade indirecta sobre ordem parcial}\ \} \\ & 0 \ominus b = 0 \end{array}$$

□

Segunda igualdade:

$$\begin{array}{ll} & a \ominus 0 \leqslant x \\ \equiv & \quad \{\ \text{(F2)}\ \} \\ & a \leqslant 0 + x \\ \equiv & \quad \{\ 0 \text{ é o elemento neutro da adição}\ \} \\ & a \leqslant x \\ :: & \quad \{\ \text{igualdade indirecta sobre ordem parcial}\ \} \\ & a \ominus 0 = a \end{array}$$

□

□

Questão 3 Considere a definição do combinador condicional

$$p \to R, S \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad [R\ , S] \cdot [\Phi_p\ , \Phi_{(\neg\ p)}]^\circ \tag{F3}$$

onde $A \xrightarrow{p} \mathbb{B}$ é um predicado (função booleana), Φ_p a respectiva coreflexiva e $A \xrightarrow{R,S} B$ duas relações. Recordando a lei (134),

$$[R\ , S] \cdot [T\ , U]^\circ \quad = \quad (R \cdot T^\circ) \cup (S \cdot U^\circ)$$

mostre que

$$y = (p \to f, g)\ x \quad \equiv \quad (y = f\ x \wedge p\ x) \vee (y = g\ x \wedge \neg\ (p\ x))$$

é a conversão para notação *pointwise* de (F3) para o caso funcional.

RESOLUÇÃO: Repare-se que:

$$\begin{array}{ll}
 & y = (p \to f, g)\ x \\
\equiv & \quad \{\ (52)\ \} \\
 & y\ (p \to f, g)\ x \\
\equiv & \quad \{\ (F3)\ \} \\
 & y\ ([f\ , g] \cdot [\Phi_p\ , \Phi_{(\neg\ p)}]^\circ)\ x \\
\equiv & \quad \{\ (134)\ ;\ (151)\ \} \\
 & y\ (f \cdot \Phi_p \cup g \cdot \Phi_{(\neg\ p)})\ x \\
\equiv & \quad \{\ (95)\ \} \\
 & y\ (f \cdot \Phi_p)\ x \vee y\ (g \cdot \Phi_{(\neg\ p)})\ x \\
\equiv & \quad \{\ (57) \text{ e } (144), \text{ ambas duas vezes}\ \} \\
 & \langle \exists\ z\ :\ y\ f\ z :\ z = x \wedge p\ z \rangle \vee \langle \exists\ z\ :\ y\ g\ z :\ z = x \wedge \neg\ p\ z \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{'trading' } (8) \text{ e } (52), \text{ repetidas vezes}\ \} \\
 & \langle \exists\ z\ :\ z = x :\ y = f\ z \wedge p\ z \rangle \vee \langle \exists\ z\ :\ z = x :\ y = g\ z \wedge \neg\ p\ z \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{'one-point' } (15) \text{ duas vezes}\ \} \\
 & (y = f\ x \wedge p\ x) \vee (y = g\ x \wedge \neg\ p\ x) \\
\Box &
\end{array}$$

$\Box$

Questão 4 Recordando o invariante do problema PROPOSITIO DE HOMINE ET CAPRA ET LVPO,

$$\begin{array}{ccc}
Being & \xleftarrow{CanEat} & Being \\
{\scriptstyle where}\downarrow & \subseteq & \downarrow{\scriptstyle \underline{Farmer}} \\
Bank & \xleftarrow[where]{} & Being
\end{array} \tag{F4}$$

considere a operação que, em qualquer momento da execução do"puzzle", faz regressar tudo ao estado inicial:

post $where' = \underline{Left}$

Demonstre formalmente que essa operação preserva o invariante (F4).

RESOLUÇÃO: Pegue-se no termo **inv** $where'$ e simplifique-se:

$$
\begin{array}{ll}
 & \textbf{inv}\ where' \\
\equiv & \quad \{\ where' = \underline{Left}\ \} \\
 & \underline{Left} \cdot CanEat \subseteq \underline{Left} \cdot \underline{Farmer} \\
\equiv & \quad \{\ \text{funções constantes: } \underline{f} \cdot g = \underline{f}\ \} \\
 & \underline{Left} \cdot CanEat \subseteq \underline{Left} \\
\equiv & \quad \{\ \text{'shunting'}\ \} \\
 & CanEat \subseteq \underline{Left}^{\circ} \cdot \underline{Left} \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{ker}\ \underline{k} = \top\ \} \\
 & CanEat \subseteq \top \\
\equiv & \quad \{\ \text{qualquer relação é menor que } \top\ \} \\
 & true \\
\Box &
\end{array}
$$

Logo o invariante é sempre válido após a operação, independentemente de o ser antes — típico de uma operação de "restart" (voltar ao início). □

Parte II

Questão 5 Considere o fragmento de Alloy

```
sig Aula {
  doc : one Docente,
  dh : one DHora,
  sala : one Sala
}
sig Docente, DHora, Sala { }
```

que caracteriza uma aula associando-lhe um docente, uma data/hora ($DHora$) de funcionamento e uma sala.

Suponha ainda que alguém escreve o seguinte invariante sobre $Aula$,

$$sala \leqslant \langle doc, dh \rangle \qquad \text{(F5)}$$

onde a ordem

$$R \leqslant S \quad \equiv \quad \mathsf{ker}\ S \subseteq \mathsf{ker}\ R \qquad \text{(F6)}$$

exprime que a relação R é *menos injectiva* ou *mais definida* (inteira) que a relação S.

Indique, justificando através da expansão *pointwise* de (F5), qual dos seguintes textos é captado por esse invariante:

1. Um docente doc, para toda a data/hora dh, está sempre numa sala.

2. Se duas aulas (eg. de cursos diferentes) são na mesma sala então têm o mesmo docente e começam à mesma hora.

3. Se duas aulas (eg. de cursos diferentes) têm o mesmo docente e começam à mesma hora, então têm lugar na mesma sala

4. Se duas aulas (eg. de cursos diferentes) são na mesma sala e começam à mesma hora então têm o mesmo docente.

Questão 6 Considere a equivalência relacional

$$(f \cdot g^\circ) \cap R \subseteq \bot \quad \equiv \quad R \cdot g \subseteq (\neq) \cdot f \tag{F7}$$

onde f e g são funções e $(\neq)$ abrevia $id \Rightarrow \bot$.

- Escreva $R \cdot g \subseteq (\neq) \cdot f$ em notação *pointwise*.
- Demonstre a equivalência (F7) recorrendo, entre outras, às leis de "shunting", à propriedade universal da implicação de relações e à propriedade distributiva seguinte:

$$f^\circ \cdot (R \Rightarrow S) \cdot g \quad = \quad (f^\circ \cdot R \cdot g) \Rightarrow (f^\circ \cdot S \cdot g) \tag{F8}$$

RESOLUÇÃO:

- Conversão:

$$\begin{array}{ll} & R \cdot g \subseteq (\neq) \cdot f \\ \equiv & \quad \{ \text{ (59), seguida de (70) duas vezes } \} \\ & \langle \forall\, b, a \ :\ b\ R\ (g\ a) :\ b \neq (f\ a) \rangle \end{array}$$

- Cálculo (acrescentar as justificações):

$$\begin{array}{ll} & (f \cdot g^\circ) \cap R \subseteq \bot \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & f \cdot g^\circ \subseteq (R \Rightarrow \bot) \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & f \subseteq (R \Rightarrow \bot) \cdot g \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & f \subseteq (R \cdot g \Rightarrow \bot) \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & R \cdot g \subseteq (f \Rightarrow \bot) \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & R \cdot g \subseteq (id \cdot f \Rightarrow \bot \cdot f) \\ \equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\ & R \cdot g \subseteq (id \Rightarrow \bot) \cdot f \\ \Box & \end{array}$$

□

Questão 7 Considere, no contexto do problema O NOVO PLANO DE ESTUDOS DO MEI que foi abordado nas aulas desta disciplina e vem dado em apêndice, a operação que inscreve o aluno a na opção complementar c, dada pelo par **pre/post** seguinte:

pre $\langle \forall\ x\ :\ x\ R\ a :\ d\ x \neq d\ (p\ c) \rangle$
post $R' = R \wedge S' = S \cup \{(c, a)\}$

Atente no significado da pré-condição: *qualquer que seja o perfil x em que o aluno a esteja inscrito, o dia desse perfil é sempre diferente do dia da opção complementar c.*

Complete as justificações do cálculo que se segue e que mostra que essa pré-condição é a mais fraca possível para garantir um dos invariantes do problema, a saber:

inv $(R, S) = d \cdot R \cap d \cdot p \cdot S \subseteq \bot$ — *os perfis ocupam dias inteiros*

Cálculo a justificar:

$$
\begin{array}{ll}
 & \textbf{inv}\ (R', S') \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ \} \\
 & d \cdot R' \cap d \cdot p \cdot S' \subseteq \bot \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ \} \\
 & d \cdot R \cap d \cdot p \cdot (S \cup \underline{c} \cdot \underline{a}^{\circ}) \subseteq \bot \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ \} \\
 & d \cdot R \cap (d \cdot p \cdot S \cup d \cdot p \cdot \underline{c} \cdot \underline{a}^{\circ}) \subseteq \bot \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ \} \\
 & \textbf{inv}\ (R, S) \wedge \underbrace{d \cdot R \cap (d \cdot p \cdot \underline{c} \cdot \underline{a}^{\circ}) \subseteq \bot}_{WP} \\
\equiv & \quad \{\ \text{(F7)}\ \} \\
 & \textbf{inv}\ (R, S) \wedge \underbrace{d \cdot R \cdot \underline{a} \subseteq (\neq) \cdot d \cdot p \cdot \underline{c}}_{WP} \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ \} \\
 & \textbf{inv}\ (R, S) \wedge \underbrace{R \cdot \underline{a} \subseteq d^{\circ} \cdot (\neq) \cdot d \cdot p \cdot \underline{c}}_{WP} \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ \} \\
 & \textbf{inv}\ (R, S) \wedge \underbrace{\langle \forall\ x\ :\ x\ R\ a :\ d\ x \neq d\ (p\ c) \rangle}_{WP} \\
\Box &
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO: Justificações:

$$
\begin{array}{ll}
 & \textbf{inv}\ (R', S') \\
\equiv & \quad \{\ \text{definição de } \textbf{inv} \cdot\ \} \\
 & d \cdot R' \cap d \cdot p \cdot S' \subseteq \bot \\
\equiv & \quad \{\ \text{pós-condição ; (73) do exercício 24}\ \} \\
 & d \cdot R \cap d \cdot p \cdot (S \cup \underline{c} \cdot \underline{a}^{\circ}) \subseteq \bot \\
\equiv & \quad \{\ \text{distributividade (101)}\ \} \\
 & d \cdot R \cap (d \cdot p \cdot S \cup d \cdot p \cdot \underline{c} \cdot \underline{a}^{\circ}) \subseteq \bot \\
\equiv & \quad \{\ \text{distributividade da interseção pela reunião ; universal-}\cdot \cup \cdot \text{ (97) ; definição de } \textbf{inv} \cdot\ \} \\
 & \textbf{inv}\ (R, S) \wedge \underbrace{d \cdot R \cap (d \cdot p \cdot \underline{c} \cdot \underline{a}^{\circ}) \subseteq \bot}_{WP}
\end{array}
$$

$\equiv$ { (F7) }

$\mathbf{inv}\ (R,S)\ \wedge\ \underbrace{d \cdot R \cdot \underline{a}\ \subseteq\ (\neq) \cdot d \cdot p \cdot \underline{c}}_{WP}$

$\equiv$ { 'shunting' (79) }

$\mathbf{inv}\ (R,S)\ \wedge\ \underbrace{R \cdot \underline{a}\ \subseteq\ d^\circ \cdot (\neq) \cdot d \cdot p \cdot \underline{c}}_{WP}$

$\equiv$ { passagem a *pointwise* (59); (70) duas vezes; função constante (72) duas vezes }

$\mathbf{inv}\ (R,S)\ \wedge\ \underbrace{\langle \forall\ x\ :\ x\ R\ a :\ d\ x \neq d\ (p\ c) \rangle}_{WP}$

□

□

Questão 8 A sobreposição de relações

$$R \dagger S\ =\ S \cup R \cap \bot / S^\circ, \tag{F9}$$

é um combinador muito útil para exprimir operações de *updating* em modelos relacionais. Mostre que a igualdade

$$R \dagger f = f \tag{F10}$$

se verifica para qualquer relação R e função f. (**Sugestão:** comece por simplificar o termo $\bot\ /\ f^\circ$.)

RESOLUÇÃO: Cálculo de $\bot\ /\ f^\circ$ (justificar ao estudar):

$X\ \subseteq\ \bot\ /\ f^\circ$

$\equiv$ { ..... }

$X \cdot f^\circ\ \subseteq\ \bot$

$\equiv$ { ..... }

$X\ \subseteq\ \bot \cdot f$

$\equiv$ { ..... }

$X\ \subseteq\ \bot$

:: { igualdade indirecta }

$\bot\ /\ f^\circ = \bot$

□

Logo:

$R \dagger f = f$

$\equiv$ { (F9) }

$f \cup R \cap \bot\ /\ f^\circ = f$

$\equiv$ { $\bot\ /\ f^\circ = \bot$; $R \cap \bot = \bot$ }

$f \cup \bot = f$

$\equiv$ { $X \cup \bot = X$ }

$f = f$

□

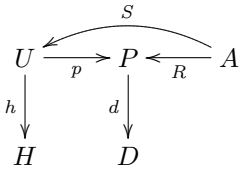
□

Apêndice: CASO DE ESTUDO — O NOVO PLANO DE ESTUDOS DO MEI

Tipos:

A – Aluno
P – Perfil
D – Dia
H – Hora
U – Unidade curricular

Relações:



Legenda:

p — dá o perfil de cada UC
h — dá a hora a que uma UC funciona
d — o dia ocupado por cada perfil
R — relaciona alunos com os seus perfis
S — relaciona alunos com as suas UCs complementares.