Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

1.º/4.º Ano de MEI & MMC / MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2019/20

Teste — 16 de Janeiro
14h00
Sala E7-0.07

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos que não queiram manter a nota do **miniteste** devem responder a todas as questões, entregando a prova ao fim de duas horas.*
- *Os alunos que desejam manter a nota do **miniteste** devem responder apenas à parte B (questões 5, 6, 7, 8), devendo nesse caso entregar a prova ao fim de uma hora.*

PROVA COM CONSULTA (1 ou 2 horas)

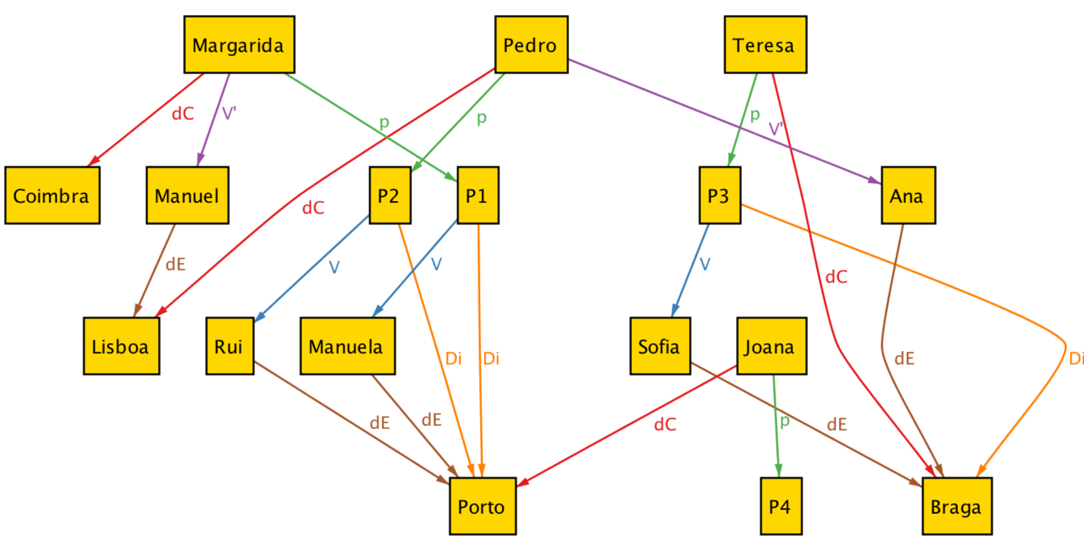
Parte A

Questão 1 Recorde o problema do apuramento eleitoral que foi assunto das aulas desta disciplina, abreviado da forma seguinte:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p"'] \arrow[rr, bend left, "V'"] \arrow[dr, "dC"'] & P \arrow[r, "V"'] \arrow[d, "Di"'] & E \arrow[dl, "dE"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

$$inv_{12}\ (V, V') = id \leqslant [V\,,\,V']$$
$$inv_3\ (V, V') = dE \cdot [V\,,\,V'] \ \subseteq\ [Di\,,dC]$$

Investigue, justificando, quais dos invariantes estão a ser violados na seguinte instância desse modelo:



Questão 2 Mostre que a relação $R_f = f^\circ \cdot R \cdot f$ é difuncional sempre que R o é. Recorda-se que R é *difuncional* sempre que

$$R \cdot R^\circ \cdot R \subseteq R \tag{F1}$$

se verifica.

Questão 3 Uma das funções básicas do *Prelude* do Haskell é a função

$$\begin{array}{l} \mathit{findIndices} :: (a \to \mathbb{B}) \to [\,a\,] \to [\mathbb{Z}] \\ \mathit{findIndices}\ p\ xs = [\,i \mid (x, i) \leftarrow \mathsf{zip}\ xs\ [0\,..],\ p\ x\,] \end{array}$$

cujo resultado identifica os índices de elementos de `xs` que satisfazem o predicado `p`. Por exemplo, $findIndices\ (< 0)\ [1, -2, 3, 0, -5] = [1, 4]$. (**NB:** os índices começam em 0 nesta implementação da função.) Calcule o respectivo *teorema grátis* e derive dele o corolário em que R_a é uma função.

Questão 4 Recorde o invariante do problema PROPOSITIO DE HOMINE ET CAPRA ET LVPO,

$$\begin{tikzcd} \mathit{Being} \arrow[d, "\mathit{where}"'] \arrow[dr, phantom, "\subseteq"] & \mathit{Being} \arrow[l, "\mathit{CanEat}"'] \arrow[d, "\mathit{farmer}"] \\ \mathit{Bank} & \mathit{Being} \arrow[l, "\mathit{where}"] \end{tikzcd} \tag{F2}$$

onde

$$\mathit{CanEat} = \mathit{Eats} \cap \ker \mathit{where} \tag{F3}$$

$$\mathit{Eats} = \mathit{fox} \cdot \mathit{goat}^\circ \cup \mathit{goat} \cdot \mathit{beans}^\circ \tag{F4}$$

assumindo as abreviaturas (funções **constantes**) $\mathit{farmer} = \underline{\mathit{Farmer}}$, $\mathit{fox} = \underline{\mathit{Fox}}$ etc. É fácil mostrar que o invariante (F2) é equivalente à conjunção das duas cláusulas seguintes:

$$\mathit{fox} \cdot \mathit{goat}^\circ \cap \ker \mathit{where} \subseteq \frac{\mathit{where} \cdot \mathit{farmer}}{\mathit{where}} \tag{F5}$$

$$\mathit{goat} \cdot \mathit{beans}^\circ \cap \ker \mathit{where} \subseteq \frac{\mathit{where} \cdot \mathit{farmer}}{\mathit{where}} \tag{F6}$$

Suponha agora que alguém tenta resolver este *puzzle* definindo, em lugar de (F2), o seguinte invariante:

$$\mathit{where} \cdot \mathit{goat} = \mathit{where} \cdot \mathit{farmer} \tag{F7}$$

Exprima o significado de (F7) por palavras suas, e apresente justificações para os passos do seguinte raciocínio que mostra que (F7) é mais **forte** que (F6):

$$\begin{array}{ll} & \mathit{goat} \cdot \mathit{beans}^\circ \cap \ker \mathit{where} \subseteq \dfrac{\mathit{where} \cdot \mathit{farmer}}{\mathit{where}} \\ \Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathit{goat} \cdot \mathit{beans}^\circ \subseteq \dfrac{\mathit{where} \cdot \mathit{farmer}}{\mathit{where}} \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathit{where} \cdot \mathit{goat} \subseteq \mathit{where} \cdot \mathit{farmer} \cdot \mathit{beans} \\ \equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \text{(F7)} \\ \Box & \end{array}$$

Parte B

Questão 5 A chamada *diagonal* R_d de uma relação R é a relação com o mesmo tipo definida como se segue:

$$R_d \quad = \quad R \cap (R \setminus R \,/\, R)^\circ \tag{F8}$$

Mostre, recorrendo à igualdade indirecta e propriedades das divisões relacionais que conhece que a seginte propriedade universal é válida:

$$X \;\subseteq\; R_d \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} X \;\subseteq\; R \\ R \cdot X^\circ \cdot R \;\subseteq\; R \end{array} \right. \tag{F9}$$

Questão 6 Mostre que a extensão relacional do condicional de McCarthy

$$p \rightarrow R, S \tag{F10}$$

pode ser expressa por $R \cdot \Phi_p \cup S \cdot \Phi_{\neg\ p}$ e converta para notação *pointwise* a asserção:

$$y\ (R \cdot \Phi_p \cup S \cdot \Phi_{\neg\ p})\ x$$

Questão 7 Seja usada a seguinte abreviatura

$$\{\, a \leftarrow b \,\} = \underline{a} \cdot \underline{b}^\circ \tag{F11}$$

na seguinte especificação da operação

$$venda\ (v, c)\ Usou \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad Usou \cup \{\, v \leftarrow c \,\} \tag{F12}$$

que regista uma nova venda com *cupon* no problema da "mercearia da D. Acácia" que foi abordado nas aulas (ver anexo). Calcule a pré-condição mais fraca para a operação $venda\ (v, c)$ preservar o invariante inv_3 e exprima-a em notação *pointwise*.

Questão 8 Uma lista de pares $x : (A \times A)^*$ pode ser representada simplesmente por $y : A^*$ desde que o comprimento de y seja par ($even$). Seja

$$\theta :: (A \times A) \rightarrow A^* \rightarrow A^*$$
$$\theta\ (a, b)\ y = a : b : y$$

a operação que adiciona pares a uma tal representação. Num dispositivo médico em que esta representação vai ser usada pretende-se garantir que $\theta\ (a, b)$ preserva o invariante

$$inv\ y = even\ (\mathsf{length}\ y) \tag{F13}$$

Por interpretação abstracta, a respectiva prova é quase imediata desde que se encontre a *simulação* abstracta ϕ de θ no diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "even"'] & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\phi"'] \\
 & A^* \arrow[u, "\mathsf{length}"] \arrow[ul, bend left, "inv"] & A^* \arrow[u, "\mathsf{length}"'] \arrow[l, "\theta\ (a,b)"]
\end{tikzcd}$$

Identifique ϕ e complete a prova, a saber: (a) que ϕ simula $\theta\ (a, b)$; (b) que ϕ preserva o invariante $even$.

ANEXO — "Mercearia da D. Acácia"

Modelo:

$$
\begin{tikzcd}
 & Cliente & Venda \arrow[l, "cliente"'] \arrow[ddr, "data"] & VendaProduto \arrow[l, "venda"'] \arrow[d, "produto"'] \\
Dourado \arrow[ur, "cliente\_dou"] & & Cupon \arrow[ul, "cliente\_cup"] \arrow[u, "Usou"'] \arrow[dr, "limite"'] & Produto \\
 & ClienteTel \arrow[uu, "cliente\_tel"] & & Data \arrow[loop below, "(\leqslant)"]
\end{tikzcd}
$$

Invariantes:

$$inv_1 \;\; Usou = Usou \; \subseteq \; \frac{cliente\_cup}{cliente} \tag{F14}$$

$$inv_2 \;\; Usou = Usou \cdot Usou^{\circ} \; \subseteq \; id \tag{F15}$$

$$inv_3 \;\; Usou = data \cdot Usou \; \subseteq \; (\leqslant) \cdot limite \tag{F16}$$