Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

1.º/4.º Ano de MEI & MMC / MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2019/20

Mini-teste — 28 de Novembro
14h00
Sala E7-0.07

---

*Este mini-teste consta de **4** questões todas com as mesma cotação (2.5 valores).*

PROVA COM CONSULTA (1 hora)

Questão 1 Considere o seguinte diagrama relacional,

$$\begin{tikzcd}
A \times AL \arrow[r, "F"] \arrow[d, "R"'] & C & C \times AL \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[d, "P"] \\
D \times NF \arrow[rr, "\pi_1"'] & & D
\end{tikzcd}$$

bem como o seguinte texto a ele associado:

> *O percurso dos alunos de uma universidade pode variar ao longo dos anos lectivos (AL). Não só cada aluno (A) pode mudar de curso (C) como até pode frequentar (F) mais do que um curso num mesmo AL. Mas também os cursos mudam com os tempos, nomeadamente quando são remodelados e passam a ter diferentes planos de estudo (P) com as mesmas ou outras disciplinas (D). O objectivo de um aluno (A) é fazer disciplinas com nota final (NF) positiva por forma a vir a graduar-se no(s) curso(s) que frequenta.*

- Suponha que alguém postulou a propriedade

  $$\pi_1 \cdot R \subseteq P \cdot \langle F, \pi_2 \rangle \tag{F1}$$

  com base no diagrama acima. O que se pretenderá garantir com esta propriedade? Justifique convertendo-a para notação *pointwise* e interpretando o resultado.

- No mesmo ano lectivo um aluno não poderá aparecer com mais do que uma nota final a cada disciplina. Indique, justificando, qual das expressões seguintes escolheria para especificar essa garantia:

  $$\pi_1 \cdot R \text{ é simples} \tag{F2}$$
  $$\pi_2 \leqslant \langle R^\circ, \pi_1 \rangle \tag{F3}$$
  $$\pi_1 \leqslant \langle R^\circ, \pi_2 \rangle \tag{F4}$$

NB: a ordem $\leqslant$ é a que compara relações quanto à sua *injectividade*.

Questão 2 Calcule o teorema grátis da função seguinte, escrita em sintaxe Haskell,

$$\theta : (a \to \mathbb{Z}) \to a \to [\,a\,]$$

sabendo que o functor relacional associado ao tipo $[\,t\,]$ é $R_{[\,t\,]} = (R_t)^*$ (listas). Instancie esse teorema para funções. (Valorização: o que é que acha que a função θ "faz"? Responda informalmente mas com base no teorema calculado.)

Questão 3 A seguir apresenta-se a prova da lei da troca,

$$[\langle f\,, g\rangle\,, \langle h, k\rangle] \quad = \quad \langle [f\,, h], [g\,, k]\rangle$$

que envolve as **funções** $f\,, g, h, k$:

$$
\begin{array}{ll}
& [\langle f\,, g\rangle\,, \langle h, k\rangle] = \langle [f\,, h], [g\,, k]\rangle \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \langle f\,, g\rangle = \langle [f\,, h], [g\,, k]\rangle \cdot i_1 \\ \langle h, k\rangle = \langle [f\,, h], [g\,, k]\rangle \cdot i_2 \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \langle f\,, g\rangle = \langle [f\,, h] \cdot i_1, [g\,, k] \cdot i_1\rangle \\ \langle h, k\rangle = \langle [f\,, h] \cdot i_2, [g\,, k] \cdot i_2\rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \langle f\,, g\rangle = \langle f\,, g\rangle \\ \langle h, k\rangle = \langle h, k\rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathit{true}
\end{array}
$$

Ora verifica-se que essa lei generaliza a **relações**,

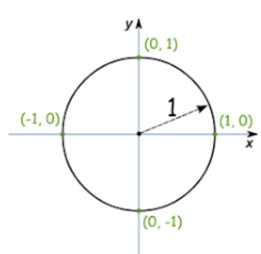
$$[\langle R, S\rangle\,, \langle Q, V\rangle] \quad = \quad \langle [R\,, Q], [S\,, V]\rangle \tag{F5}$$

tal como se mostra no diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "R"'] \arrow[drr, "S"' near start] & A + B & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "V"] \arrow[dll, "Q" near start] \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D
\end{tikzcd}
$$

Em que medida pode a demonstração acima ser usada para provar (F5)? Analise cada passo dessa prova e apresente as respectivas justificações, para o caso relacional.

Questão 4 O círculo unitário



é descrito pela relação $\mathbb{R} \xleftarrow{R} \mathbb{R}$ tal que $y\ R\ x \ \Leftrightarrow\ y^2 + x^2 = 1$. Em notação relacional *pointfree* tem-se

$$R = sq^\circ \cdot (1-) \cdot sq \tag{F6}$$

onde $\left\{ \begin{array}{l} sq : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ sq\ x = x^2 \end{array} \right.$ e $\left\{ \begin{array}{l} (1-) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (1-)\ x = 1 - x \end{array} \right.$

É fácil de ver que R não é nem inteira, nem simples, nem injectiva, nem sobrejectiva. Contudo, R é *difuncional*, pois pode mostrar-se que

$$R \cdot R^{\circ} \cdot R \;\subseteq\; R \tag{F7}$$

se verifica.

Demonstre (F7). **Sugestão**: é fácil de mostrar que a função $(1-)$ é simétrica, ou seja, é a sua própria inversa. Este facto pode ser-lhe útil na demonstração de (F7).
