Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

1.º/4.º Ano de MEI & MMC / MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2018/19

Exame de recurso — 06 de Fevereiro
15h00
Sala E7-0.05

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de* ***8*** *questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo* ***médio*** *estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos que não queiram manter a nota do* ***miniteste*** *devem responder a todas as questões, entregando a prova ao fim de duas horas.*
- *Os alunos que desejam manter a nota do* ***miniteste*** *devem responder apenas à parte B (questões 5, 6, 7, 8), devendo nesse caso entregar a prova ao fim de uma hora.*

PROVA COM CONSULTA (1 ou 2 horas)

Parte A

Questão 1 Complete, com justificações, o seguinte raciocínio que mostra que, se $\leqslant$ for uma ordem *antissimétrica* e *reflexiva*, então a implicação

$$f\ a = f\ b \Rightarrow a \leqslant b \tag{F1}$$

é *equivalente* à afirmação de f como função injectiva:

$$\begin{array}{cl}
 & f \text{ é injectiva} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f^\circ \cdot f \subseteq id \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant \cap \leqslant^\circ \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant \wedge f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant^\circ \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & f^\circ \cdot f \subseteq \leqslant \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \text{(F1)}
\end{array}$$

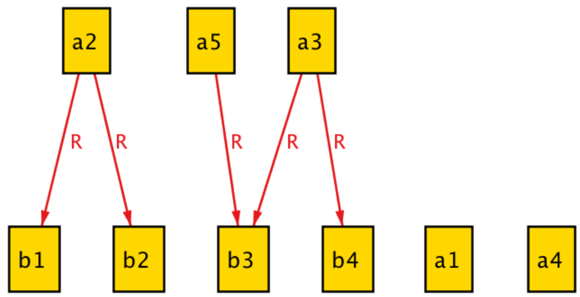
Questão 2 Recorde que a negação (ou complemento) de uma relação é dada por $\neg\ R \stackrel{\text{def}}{=} R \Rightarrow \bot$. Partindo desta definição e das propriedades de $R \Rightarrow S$, use igualdade indirecta para demonstrar a bem conhecida *lei de Morgan*:

$$\neg(R \cup S) = (\neg R) \cap (\neg S) \tag{F2}$$

Questão 3 A sobreposição de relações

$$R \dagger S \ = \ S \cup R \cap \bot / S^{\circ} \tag{F3}$$

é um combinador muito útil para exprimir operações de *updating* em modelos relacionais. Seja dada a relação $R : A \to B$ dada na figura, onde $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:



Represente sob a forma de matrizes booleanas $(0, 1)$ as sobreposições indicadas:

$P = \top \dagger R =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1					
b_2					
b_3					
b_4					

$Q = R \dagger (\underline{b_4} \cdot \underline{a_2}^{\circ}) =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1					
b_2					
b_3					
b_4					

Das relações obtidas, indique (justificando) quais são (a) inteiras; (b) simples; (c) sobrejectivas.

Questão 4 O anexo deste enunciado transcreve um modelo relacional que foi já assunto de várias questões em provas anteriores desta disciplina. Suponha agora que alguém enriquece o modelo com o registo do instante (T) em que cada eleitor votou:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "p"'] \arrow[rr, bend left, "V'"] \arrow[dr, "dC"'] & P \arrow[r, "V"'] \arrow[d, "Di"] & E \times T \arrow[dl] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Quer dizer: $(e, t) \ V \ p$ — designa que o eleitor e votou no partido p no instante ("time stamp") t; $(e, t) \ V' \ c$ — designa a mesma coisa relativamente ao candidato c. Redefina, para este novo modelo, os três invariantes dados e acrescente-lhe o seguinte:

O mesmo eleitor nunca vota duas vezes, isto é, vota num e num só instante.

Parte B

Questão 5 Considere a função

$$splitPlaces : (A^*)^* \leftarrow A^* \leftarrow \mathbb{N}_0{}^*$$

que extrai de uma lista blocos com os comprimentos indicados, por exemplo:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{splitPlaces}\ [1,2,3]\ \texttt{"abcdefg"} = [\texttt{"a"}, \texttt{"bc"}, \texttt{"def"}] \\
\mathit{splitPlaces}\ [\,]\ \texttt{"abcdefg"} = [\,] \\
\mathit{splitPlaces}\ [100]\ \texttt{"abcdefg"} = [\texttt{"abcdefg"}] \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

Calcule o teorema grátis de $\mathit{splitPlaces}$ e derive dele o corolário

$$
\mathsf{map}\ (\mathsf{map}\ f)\ (\mathit{splitPlaces}\ n\ x)) = \mathit{splitPlaces}\ n\ (\mathsf{map}\ f\ x) \tag{F4}
$$

Questão 6 Como sabe, um programa (representado por uma relação $R : A \to B$) satisfaz o contrato $q \xleftarrow{R} p$ sempre que

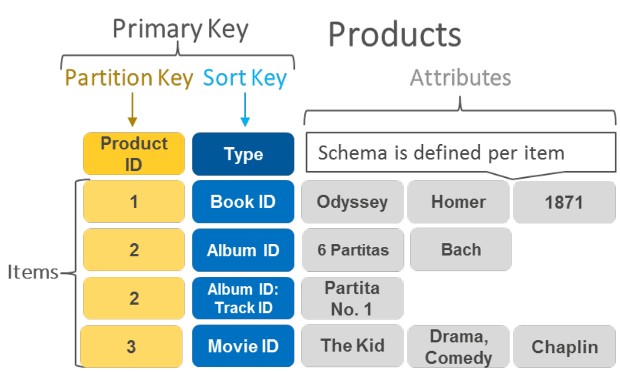
$$
R \cdot \Phi_p \ \subseteq\ \Phi_q \cdot R
$$

se verifica. Contudo, pode haver valores à entrada $a \in A$ que satisfazem a precondição p, isto é, $p\ a =$ True, mas aos quais R não reage, o que encerra uma certa contradição. Para a evitar costuma-se exigir um critério adicional, chamado *satisfiabilidade*:

$$
\Phi_p \ \subseteq\ R^\circ \cdot \Phi_q \cdot R \tag{F5}
$$

Converta (F5) para notação com variáveis (*pointwise*) e explique por palavras suas o seu significado.

Questão 7 O modelo *key-value-pair* (KV) está cada vez mais na moda para organizar informação em larga escala. É essencialmente constituído por relações *simples* de tipo genérico $K \to V$ onde as chaves (em K) não se repetem. O espaço dos valores V pode ser tão elaborado quanto se queira, tal como se mostra na figura



onde $V = \mathit{Music} + \mathit{Book} + ...$ etc. O isomorfismo que se segue

$$
\begin{tikzcd}
A \to (B + C) \arrow[rr, bend left, "uncojoin"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & (A \to B) \times (A \to C) \arrow[ll, bend left, "cojoin"]
\end{tikzcd}
$$

permite decompor uma estrutura-KV em sub-estruturas, uma para cada tipo envolvido, onde

$$
\mathit{cojoin}\ (R, S) = [R^\circ, S^\circ]^\circ \tag{F6}
$$

$$
\mathit{uncojoin}\ X = (R, S)\ \mathbf{where}\ R = \ldots; S = \ldots \tag{F7}
$$

Complete a definição de $\mathit{uncojoin}\ X$ e mostre que cada uma das relações em que X é decomposta é simples (partindo de X simples, claro).

Questão 8 (Interpretação abstracta) Suponha que $f : B \to A$ é uma função de **abstracção**, logo sobrejectiva. Suponha ainde que, pretendendo demonstrar-se o facto (concreto)

$$\langle \forall\ b\ :\ c\ Q\ b :\ d\ P\ b \rangle$$

encontra (ao converter $c\ Q\ b$ e $d\ P\ b$ para notação *pointfree*) R e S tais que $Q = S \cdot f$ e $P = R \cdot f$. Então, bastará provar

$$\langle \forall\ a\ :\ c\ S\ a :\ d\ R\ a \rangle$$

ao nível abstracto. Esta estratégia justifica-se com a lei de *cancelamento* da divisão relacional que se segue:

$$(R \cdot f) / (S \cdot f)\ =\ R / S \quad \Leftarrow \quad f \text{ é sobrejectiva} \tag{F8}$$

Usando igualdade indirecta e as leis de *shunting*, entre outras, demonstre (F8). **Sugestão**: como preparação para a resolução identifique as relações acima no diagrama:

$$\begin{tikzcd}
D & & C \arrow[ll] \\
& A \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& B \arrow[u, "f"'] \arrow[uul] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

ANEXO — Recorde de testes e exames anteriores o modelo de um sistema eleitoral electrónico de inspiração uninominal (i.e., em que se pode votar directamente nos candidatos e não apenas nos respectivos partidos) cujo diagrama relacional se apresenta de seguida,

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "p"'] \arrow[rr, bend left, "V'"] \arrow[dr, "dC"'] & P \arrow[r, "V"'] \arrow[d, "Di"'] & E \arrow[dl, "dE"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

onde

- $p\ c$ designa o partido a que o candidato c pertence
- $dC\ c$ designa o distrito pelo qual c é candidato
- $dE\ e$ designa o distrito do eleitor e
- $d\ Di\ p$ regista que o partido p concorre às eleições no distrito d
- $e\ V\ p$ indica que o eleitor e votou no partido p
- $e\ V'\ c$ indica que o eleitor e votou directamente no candidato c.

Neste modelo há vários invariantes, a saber:

$$inv_1\ (V, V') = V : E \leftarrow P \text{ e } V' : E \leftarrow C \text{ são injectivas} \tag{F9}$$
$$inv_2\ (V, V') = V^\circ \cdot V' = \bot \tag{F10}$$

pois um eleitor não pode votar em mais do que um candidato ou partido; e

$$inv_3\ (V, V')\ =\ dE \cdot [V, V'] \subseteq [Di, dC] \tag{F11}$$

pois cada eleitor está registado num distrito e só pode votar em candidatos ou partidos que concorram pelo seu distrito.

No acto eleitoral, as relações p, dC, dE e Di são estáticas, pois os cadernos eleitorais ficam definidos antes das eleições. Sempre que um eleitor vota, corre uma de duas funções:

$$apuraP\ (V, V', e, p) = (V \cup \underline{e} \cdot \underline{p}^\circ, V')$$

se tiver optado por votar num partido, ou

$$apuraC\ (V, V', e, c) = (V, V' \cup \underline{e} \cdot \underline{c}^\circ)$$

se tiver optado por votar num candidato.