Cálculo de Sistemas de Informação
Perfil: MÉTODOS FORMAIS EM ENGENHARIA DE SOFTWARE

4.º Ano de MiEI, Universidade do Minho
Ano Lectivo de 2017/18

Exame de recurso — 1 de Fevereiro
11h00
Sala CP2-105

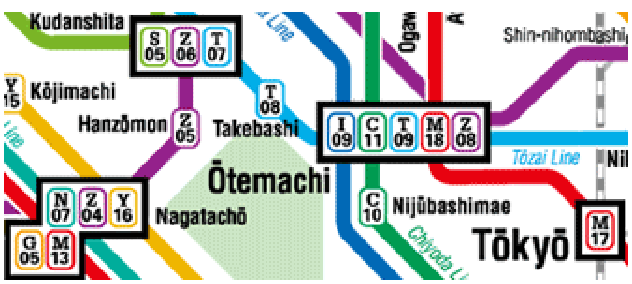
Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Este teste consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo **médio** estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos sem nota mínima no **miniteste** devem responder a todas as questões, entregando a prova ao fim de duas horas.*
- *Os alunos com nota mínima no **miniteste** podem optar por responder apenas à parte II (questões 5, 6, 7, 8), devendo nesse caso entregar a prova ao fim de uma hora.*

PROVA COM CONSULTA (1 ou 2 horas)

Parte I

Questão 1 A figura representa um fragmento do mapa de uma rede de metro, constituída por várias linhas (L) representadas com cores diferentes. As paragens (P) de cada linha estão numeradas sequencialmente. Uma estação (E) pode incluir paragens de linhas diferentes — e.g. a estação "Ōtemachi", que tem as paragens "C11", "M18", etc — permitindo aos viajantes mudar de linha.



A referida rede pode ser modelada por uma relação $P \xrightarrow{R} E$ de paragens para estações. A função $P \xrightarrow{ln} L$ dá a linha de cada paragem (e.g. "M") e $P \xrightarrow{nr} \mathbb{N}_0$ o respectivo número (e.g. 18).
Formule relacionalmente as seguintes propriedades do modelo: (a) uma estação não pode ter mais do que uma paragem da mesma linha; (b) uma paragem de uma dada linha não pode estar em duas estações diferentes.

Finalmente, defina a relação de adjacência $E \xleftarrow{S} E$ entre estações, isto é, que relaciona cada E com as E's adjacentes, possivelmente com mudança de linha.

Questão 2 Num teste anterior mostrou-se que a ordem

$$R \leqslant S \quad \equiv \quad \ker S \subseteq \ker R \tag{F1}$$

— que exprime que a relação R é *menos injectiva* ou *mais definida* (inteira) que a relação S — satisfaz, entre outras, a propriedade

$$\langle R, S \rangle \leqslant X \quad \equiv \quad R \leqslant X \wedge S \leqslant X.$$

Mostre agora que também é satisfeita a propriedade

$$X \leqslant \lfloor R, S \rfloor \quad \equiv \quad X \leqslant R \wedge X \leqslant S \tag{F2}$$

onde

$$\lfloor R, S \rfloor = [R^\circ, S^\circ]^\circ. \tag{F3}$$

Questão 3 Uma relação R diz-se *difuncional* sempre que $R = R \cdot R^\circ \cdot R$. As funções, as relações coreflexivas, $\perp$, $\top$ e muitas outras relações são exemplos de relações *difuncionais*.[1]

Mostre que uma relação difuncional que é *reflexiva* e *simétrica* é necessariamente *transitiva* (e, portanto, uma relação de equivalência).

Questão 4 Mostre que $(\frac{f}{f} \Rightarrow id) = \top$ é uma maneira (complicada!) de dizer que f é uma função injectiva.

Parte II

Questão 5 O anexo desta prova transcreve a questão nr.º 5 do teste de 4 de Janeiro. Releia o enunciado e calcule, agora, a pre-condição mais fraca para $apuraP$ satisfazer o invariante inv_3.

Questão 6 No problema da cadeira pesada ("heavy armchair") deduz-se a *simulação* da operação que roda a cadeira de posição por duas negações simultâneas

$$(\neg \times \neg) \xleftarrow{col \times dir} P \times Q$$

(pois muda a direcção e muda a cor da quadrícula) com base nas simulações

$$\neg \xleftarrow{col} P \quad \wedge \quad \neg \xleftarrow{dir} Q$$

garantidas pelas interpretações abstractas col e dir. Esse raciocínio assume a propriedade geral:

$$R \times S \xleftarrow{f \times g} P \times Q \quad \Leftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} R \xleftarrow{f} P \\ S \xleftarrow{g} Q \end{array} \right. \qquad \text{(F4)}$$

Demonstre a regra (F4) com base na definição e propriedades que conhece do produto relacional.

Questão 7 Demonstre a propriedade

$$Q \leftarrow (R \cup S) = (Q \leftarrow R) \cap (Q \leftarrow S) \qquad \text{(F5)}$$

do combinador conhecido por "seta de Reynolds", recordando a sua definição:

$$f(R \leftarrow S)g \quad \equiv \quad f \cdot S \subseteq R \cdot g \qquad \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{S} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ C & \xleftarrow[R]{} & D \end{array} \qquad \text{(F6)}$$

NB: como este combinador é de ordem superior, sugere-se a introdução de variáveis f e g, tal como em (F6).

[1] Como $R \subseteq R \cdot R^\circ \cdot R$ se verifica sempre, para mostrar que R é difuncional basta provar $R \cdot R^\circ \cdot R \subseteq R$.

Questão 8 Considere a declaração da função

$$\mathsf{until} : a \leftarrow a \leftarrow (a \leftarrow a) \leftarrow (\mathbb{B} \leftarrow a).$$

que na documentação da linguagem Haskell tem a seguinte explicação: *"*until p f *yields the result of applying f until p holds"*. Verifique se pode deduzir a propriedade

$$r \xleftarrow{f} r \;\Rightarrow (\mathsf{until}\ p\ f) \cdot r = r \cdot (\mathsf{until}\ (p \cdot r)\ f) \tag{F7}$$

como consequência do teorema grátis de until.

ANEXO — Recorde do miniteste o modelo de um sistema eleitoral electrónico de inspiração uninominal (i.e., em que se pode votar directamente nos candidatos e não apenas nos respectivos partidos) cujo diagrama relacional se apresenta de seguida,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "p"'] \arrow[rr, bend left, "V'"] \arrow[dr, "dC"'] & P \arrow[r, "V"'] \arrow[d, "Di"'] & E \arrow[dl, "dE"] \\ & D & \end{tikzcd}$$

onde

- $p\ c$ designa o partido a que o candidato c pertence
- $dC\ c$ designa o distrito pelo qual c é candidato
- $dE\ e$ designa o distrito do eleitor e
- $d\ Di\ p$ regista que o partido p concorre às eleições no distrito d
- $e\ V\ p$ indica que o eleitor e votou no partido p
- $e\ V'\ c$ indica que o eleitor e votou directamente no candidato c.

Neste modelo há vários invariantes, a saber:

$$inv_1\ (V, V') = V : E \leftarrow P \text{ e } V' : E \leftarrow C \text{ são injectivas} \tag{F8}$$
$$inv_2\ (V, V') = V^\circ \cdot V' = \bot \tag{F9}$$

pois um eleitor não pode votar em mais do que um candidato ou partido;

$$inv_3\ (V, V') \;=\; dE \cdot [V, V'] \subseteq [Di, dC] \tag{F10}$$

pois cada eleitor está registado num distrito e só pode votar em candidatos ou partidos que concorram pelo seu distrito.

No acto eleitoral, as relações p, dC, dE e Di são estáticas, pois os cadernos eleitorais ficam definidos antes das eleições. Para apuramento dos votos correm duas funções,

$$apuraP\ (V, V', e, p) = (V \cup \underline{e} \cdot \underline{p}^\circ, V')$$
$$apuraC\ (V, V', e, c) = (V, V' \cup \underline{e} \cdot \underline{c}^\circ)$$

Mostre que a pré-condição mais fraca ("weakest precondition") para $apuraP$ preservar o invariante inv_2 é o predicado

$$pre_2\ (V, V', e, p) = \neg \langle \exists\ c\ ::\ e\ V'\ c \rangle$$

isto é: para se apurar o voto de e no partido p é preciso que e não tenha votado já num candidato c.