Cálculo de Programas

2.º Ano de MiEI+LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2016/17

Teste — 1 de Junho de 2017
16h00–18h00
Cantina de Gualtar

---

*Este teste consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 12 min.*

PROVA SEM CONSULTA (1h30m)

Questão 1 Mostre que a equação em x

$$x \cdot \mathsf{distl} = [f \, , g] \times h \tag{E1}$$

só tem uma solução: $x = [f \times h \, , g \times h]$. **Sugestão:** recorde que o isomorfismo $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id \, , i_2 \times id]$ é o inverso de distl.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{array}{ll}
& x \cdot \mathsf{distl} = [f \, , g] \times h \\
\equiv & \qquad \{ \text{ isomorfismo } \mathsf{distl}^{\circ} = \mathsf{undistl}; \mathsf{undistl} = [i_1 \times id \, , i_2 \times id] \ \} \\
& x = ([f \, , g] \times h) \cdot [i_1 \times id \, , i_2 \times id] \\
\equiv & \qquad \{ \text{ fusão-+ (20) } \} \\
& x = [([f \, , g] \times h) \cdot (i_1 \times id) \, , ([f \, , g] \times h) \cdot (i_2 \times id)] \\
\equiv & \qquad \{ \text{ functor-}\times \text{ (14) duas vezes ; natural-id (1) duas vezes } \} \\
& x = [[f \, , g] \cdot i_1 \times h \, , [f \, , g] \cdot i_2 \times h] \\
\equiv & \qquad \{ \text{ cancelamento-+ (18) } \} \\
& x = [f \times h \, , g \times h] \\
\square &
\end{array}$$

$\square$

Questão 2 Seja xr uma função que se sabe satisfazer a propriedade

$$[[f \, , g] \, , h] \cdot \mathsf{xr} = [[f \, , h] \, , g] \tag{E2}$$

para quaisquer f, g e h. Determine o tipo mais geral de xr e, com base neste, infira a respectiva propriedade *grátis* (i.e. natural).

RESOLUÇÃO: Comecemos por tipar f, g, h da forma mais geral possível, $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ e $E \xrightarrow{h} G$. Ter-se-á então:

- $A + C \xrightarrow{[f\,,g]} B$ forçando $B = D$
- $(A + C) + E \xrightarrow{[[f\,,g]\,,h]} B$ forçando agora $B = G$.
- $A + E \xrightarrow{[f\,,h]} B$
- $(A + E) + C \xrightarrow{[[f\,,h]\,,g]} B$.
- $(A + E) + C \xrightarrow{\mathsf{xr}} (A + C) + E$.

Fazendo o diagrama habitual (aqui omitido, fica para TPC), inferimos a propriedade *grátis*

$$((f + g) + h) \cdot \mathsf{xr} = \mathsf{xr} \cdot ((f + h) + g)$$

Há alternativas a este raciocínio, mas são mais complicadas![1] $\square$

Questão 3 O seguinte diagrama foi retirado de uma questão de uma ficha das aulas práticas desta disciplina:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle p, id \rangle"] \arrow[rr, bend right, "p?"'] & 2 \times A \arrow[r, "\alpha"] & A + A \end{tikzcd} \tag{E3}$$

O diagrama define a *guarda* $(p?)$ associada um dado predicado p, onde α é um isomorfismo do qual basta saber a propriedade *grátis*:

$$\alpha \cdot (id \times f) = (f + f) \cdot \alpha \tag{E4}$$

Com base em (E3,E4) demonstre a lei

$$p\,? \cdot f = (f + f) \cdot (p \cdot f)?$$

que consta do formulário da cadeira.

---

[1] Por exemplo esta: anular $[[f\,,g]\,,h] = id$ para obtermos a definição de xr e daí o seu tipo:

$$\begin{array}{ll} & [[f\,,g]\,,h] = id \\ \equiv & \quad \{\ id = [i_1\,,i_2];\ \text{eq-+ (27)}\ ;\ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} [f\,,g] = i_1 \\ h = i_2 \end{array} \right. \\ \equiv & \quad \{\ \text{universal-+}\ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f = i_1 \cdot i_1 \\ g = i_1 \cdot i_2 \end{array} \right. \\ h = i_2 \end{array} \right. \end{array}$$

Logo, pegando em (E2):

$$\begin{array}{ll} & [[i_1 \cdot i_1\,, i_1 \cdot i_2]\,, i_2] \cdot \mathsf{xr} = [[i_1 \cdot i_1\,, i_2]\,, i_1 \cdot i_2] \\ \equiv & \quad \{\ \text{como se viu acima}\ \} \\ & \mathsf{xr} = [[i_1 \cdot i_1\,, i_2]\,, i_1 \cdot i_2] \\ \equiv & \quad \{\ \text{def } f + g\ ;\ i_2 = i_2 \cdot id\ \} \\ & \mathsf{xr} = [i_1 + id\,, i_1 \cdot i_2] \end{array}$$

Ter-se-á, então: $i_1 + id : A + B \to (A + C) + B$ e $i_1 \cdot i_2 : K \to (E + K) + D$, logo $\mathsf{xr} : (A + B) + C \to (A + C) + B$. Daqui a dedução da propriedade natural é a mesma que acima.

RESOLUÇÃO: Vamos provar a propriedade acima pegando no lado mais complexo e reduzindo-o ao mais simples:

$$
\begin{aligned}
& (f + f) \cdot (p \cdot f)? \\
= & \quad \{ \text{ (E3) } \} \\
& (f + f) \cdot \alpha \cdot \langle p \cdot f, id \rangle \\
= & \quad \{ \text{ (E4) } \} \\
& \alpha \cdot (id \times f) \cdot \langle p \cdot f, id \rangle \\
= & \quad \{ \text{ absorção-}\times \text{ (11) ; natural-id (1) duas vezes } \} \\
& \alpha \cdot \langle p \cdot f, f \rangle \\
= & \quad \{ \text{ definição de } p? \text{ dada por (E3) ; fusão-}\times \text{ (9) } \} \\
& p\,? \cdot f
\end{aligned}
$$

□

Questão 4 Considere as funções de ordem superior

$$
\begin{array}{ll}
\mathsf{pair} : B^A \times C^A \to (B \times C)^A & \mathsf{unpair} : (B \times C)^A \to B^A \times C^A \\
\mathsf{pair}\ (f, g) = \langle f, g \rangle & \mathsf{unpair}\ k = (\pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k)
\end{array}
\tag{E5}
$$

Mostre que $\mathsf{pair} \cdot \mathsf{unpair} = id$ e que $\mathsf{unpair} \cdot \mathsf{pair} = id$ e que, portanto, o isomorfismo de exponenciais $(B \times C)^A \cong B^A \times C^A$ se verifica.

RESOLUÇÃO: Tratando-se de igualdades de ordem superior, ter-se-á

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{pair} \cdot \mathsf{unpair} = id \\
\equiv & \quad \{ \text{ (73) e (74) } \} \\
& \mathsf{pair}\ (\mathsf{unpair}\ k) = k \\
\equiv & \quad \{ \text{ (E5) } \} \\
& \langle \pi_1 \cdot k, \pi_2 \cdot k \rangle = k \\
\equiv & \quad \{ \text{ fusão-}\times \text{ (9) } \} \\
& \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \cdot k = k \\
\equiv & \quad \{ \text{ reflexão-}\times \text{ (8) } \} \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

□

e

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{unpair} \cdot \mathsf{pair} = id \\
\equiv & \quad \{ \text{ (73) e (74) ; (E5) } \} \\
& \mathsf{unpair}\ \langle f, g \rangle = (f, g) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (E5) de novo } \} \\
& (\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle, \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle) = (f, g) \\
\equiv & \quad \{ \text{ cancelamento-}\times \text{ (7) } \} \\
& (f, g) = (f, g)
\end{aligned}
$$

$$\equiv \quad \{ \text{ trivial } \}$$

$$true$$

$\square$

$\square$

Questão 5 Recorde o tipo $\mathsf{LTree}\ A$ — (E13) no anexo — sobre o qual são definidos os catamorfismos:

$$g = (\![[Leaf\,, \pi_1]]\!) \tag{E6}$$

$$count = (\![[\mathsf{one}\,, \mathsf{add}]]\!) \tag{E7}$$

Usando as leis deste combinador do cálculo de programas, mostre que

$$(\![[\mathsf{one}\,, \pi_1]]\!) = \mathsf{one} \tag{E8}$$

e que, portanto,

$$count \cdot g = \mathsf{one} \tag{E9}$$

se verifica, onde one é a função constante $\underline{1}$.

RESOLUÇÃO: Cálculo de (E8):

$$(\![[\mathsf{one}\,, \pi_1]]\!) = \mathsf{one}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ universal-cata (43) } \}$$

$$\mathsf{one} \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{one}\,, \pi_1] \cdot (id + \mathsf{one}^2)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ absorção-+ (22); natural-}id \text{ (1) } \}$$

$$\mathsf{one} \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{one}\,, \pi_1 \cdot \mathsf{one}^2]$$

$$\equiv \quad \{ \text{ natural-}\pi_1 \text{ (12) ; fusão-+ } \}$$

$$\mathsf{one} \cdot \mathsf{in} = \mathsf{one} \cdot [id\,, \pi_1]$$

$$\equiv \quad \{ \text{ one é função constante (4) } \}$$

$$true$$

$\square$

Cálculo de (E9):

$$count \cdot g = \mathsf{one}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ definição (E6) ; (E8) no lado direito } \}$$

$$count \cdot (\![[Leaf\,, \pi_1]]\!) = (\![[\mathsf{one}\,, \pi_1]]\!)$$

$$\Leftarrow \quad \{ \text{ fusão-cata (46) } \}$$

$$count \cdot [Leaf\,, \pi_1] = [\mathsf{one}\,, \pi_1] \cdot (id + count^2)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ fusão-+; (20) ; absorção-+ (22); natural-}\pi_1 \text{ (12) } \}$$

$$[count \cdot Leaf\,, count \cdot \pi_1] = [\mathsf{one}\,, count \cdot \pi_1]$$

$$\equiv \quad \{ \text{ eq-+ (27) ; in} = [Leaf\,, Fork]\text{; cancelamento-+ (18) } \}$$

$$count \cdot \mathsf{in} \cdot i_1 = \mathsf{one}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ cancelamento-cata (44) } \}$$

$$[\mathsf{one}\,, \mathsf{add}] \cdot (id + count^2) \cdot i_1 = \mathsf{one}$$

$$\equiv \qquad \{ \ (id + count^2) \cdot i_1 = i_1 \text{ por natural-}i_1 \ (23) \ ; \text{cancelamento-}+ \ (18) \ \}$$

$$\mathsf{one} = \mathsf{one}$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ trivial } \}$$

$$\mathit{true}$$

□

□

Questão 6 No séc. XIV o matemático indiano Madhava de Sangamagrama calculava aproximações ao número π com base num método iterativo que, escrito em Haskell, seria dado por

$$\pi\ n = 4 * p\ n$$

onde $\pi\ n$ representa uma aproximação ao número π com n iterações, usando a função auxiliar

$$p\ 0 = 1$$
$$p\ (n+1) = p\ n - (g\ n\ /\ h\ n)$$

onde

$$g\ 0 = 1$$
$$g\ (n+1) = -(g\ n)$$
$$h\ 0 = 3$$
$$h\ (n+1) = h\ n + 2$$

Por exemplo, π 200 = 3.1465677471829556, etc.

Recorrendo à lei de "banana-split", calcule a função $k = \langle g, h \rangle$ sob a forma de um ciclo-**for**, isto é, um catamorfismo de naturais.

RESOLUÇÃO: Para aplicarmos a lei referida é preciso escrever g e h como catamorfismos de naturais ($\mathsf{F}\ f = id + f$); definimos $sym\ x = -x$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} g \cdot \mathsf{zero} = \underline{1} \\ g \cdot \mathsf{succ} = sym \cdot g \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h \cdot \mathsf{zero} = \underline{3} \\ h \cdot \mathsf{succ} = (2+) \cdot h \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ justifiquem como TPC } \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{1}, sym] \cdot (id + g) \\ h \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{3}, (2+)] \cdot (id + h) \end{array} \right.$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ universal-cata (43), duas vezes } \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g = (\!|[\underline{1}, sym]|\!) \\ h = (\!|[\underline{3}, (2+)]|\!) \end{array} \right.$$

Tem-se, então:

$$k$$

$$= \qquad \{ \ k = \langle g, h \rangle \ ; \text{cálculo anterior } \}$$

$$\langle (\!|[\underline{1}, sym]|\!), (\!|[\underline{3}, (2+)]|\!) \rangle$$

$$= \qquad \{ \text{ banana-split (51), para } \mathsf{F}\ f = id + f \ \}$$

$$(\!|([\underline{1}, sym] \times [\underline{3}, (2+)]) \cdot \langle id + \pi_1, id + \pi_2 \rangle|\!)$$

$$= \quad \{ \text{ absorção-}\times\ (11)\ ;\ \text{absorção-}+\ (22),\ 2\ \text{vezes}\ ;\ \text{natural-}id\ (1)\ \}$$

$$(\!|\langle[\underline{1}, sym \cdot \pi_1], [\underline{3}, (2+) \cdot \pi_2]\rangle|\!)$$

$$= \quad \{ \text{ lei da troca (28) ; } \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle = \underline{(b,a)}, \text{ cf. fichas } \}$$

$$(\!|[\underline{(1,3)}, \langle sym \cdot \pi_1, (2+) \cdot \pi_2 \rangle]|\!)$$

$$= \quad \{ \textbf{ for } b\ i = (\!|[\underline{i}, b]|\!)\ ;\ \text{def-}\times\ (10)\ \}$$

$$\textbf{for}\ (sym \times (2+))\ (1,3)$$

□

□

Questão 7 Em qualquer sistema de pontuação é possível definir uma medida de 'performance' que se designa por *h-index* e que conta o maior número n de ítens cuja pontuação é n ou superior. Por exemplo, sendo

$$a = [12, 14, 12, 15, 17, 11, 10, 18, 14, 15, 16, 11, 15, 12, 17]$$

as classificações de um aluno até ao momento, o seu *h-index* actual será 12. Defina-se, então, em Haskell:

$$h\_index = \underbrace{(\!|[\mathsf{zero}, \widehat{max}]|\!) \cdot (\mathsf{map}\ \widehat{min})}_{f} \cdot \underbrace{\mathsf{zip}\ [1\,..] \cdot reverse \cdot sort}_{g}$$

Mostre, usando as leis dos catamorfismos, que a parte f de h_index é a função:

$$\left\{ \begin{array}{l} f\ [\,] = 0 \\ f\ ((n,m) : t) = max\ (n\ \text{`}min\text{`}\ m)\ (f\ t) \end{array} \right.$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

$$f = (\!|[\mathsf{zero}, \widehat{max}]|\!) \cdot (\mathsf{map}\ \widehat{min})$$

$$\equiv \quad \{ \text{ em listas, } \mathsf{T}\ f = \mathsf{map}\ f\ \}$$

$$f = (\!|[\mathsf{zero}, \widehat{max}]|\!) \cdot (\mathsf{T}\ \widehat{min})$$

$$\equiv \quad \{ \text{ absorção-cata (48), para } \mathsf{B}\ (f,g) = id + f \times g\ \}$$

$$f = (\!|[\mathsf{zero}, \widehat{max}] \cdot (id + \widehat{min} \times id)|\!)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ universal-cata (43) } \}$$

$$f \cdot \mathsf{in}_{List} = [\mathsf{zero}, \widehat{max} \cdot (\widehat{min} \times id)] \cdot (id + id \times f)$$

$$\equiv \quad \{ \mathsf{in}_{List} = [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}];\ \text{absorção-}+\ (22);\ \text{functor-}\times\ (14)\ \}$$

$$f \cdot [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}] = [\mathsf{zero}, \widehat{max} \cdot (\widehat{min} \times f)]$$

$$\equiv \quad \{ \text{ fusão-}+\ (20)\ ;\ \text{eq-}+\ (27)\ \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{zero} \\ f \cdot \mathsf{cons} = \widehat{max} \cdot (\widehat{min} \times f) \end{array} \right.$$

$$\equiv \quad \{ \text{ (73) e (74), várias vezes; na segunda linha, introduz-se } ((n,m),t), \text{ etc; } \widehat{f}\ (a,b) = f\ a\ b\ \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f\ [\,] = 0 \\ f\ ((n,m) : t) = max\ (n\ \text{`}min\text{`}\ m)\ (f\ t) \end{array} \right.$$

□

Questão 8 Considere, escrito em Haskell, o tipo

$$\mathbf{data}\ \mathsf{T}\ a = \mathrm{U}\ a \mid \mathrm{V}\ [\mathsf{T}\ a]$$

cujo functor de base é:

$$\mathsf{B}\ (f,g) = f + \mathsf{map}\ g$$

O tipo $(\mathsf{T}\ a)$ forma um mónade quando equipado com

$$u = \mathrm{U}$$
$$\mu = (\![id, \mathrm{V}]\!)$$

Apresente justificações para a seguinte prova de que a propriedade $\mu \cdot u = id = \mu \cdot \mathsf{T}\ u$ se verifica, em dois passos:

$$
\begin{array}{ll}
& \mu \cdot u = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& (\![id, \mathrm{V}]\!) \cdot (\mathsf{in}_{\mathsf{T}} \cdot i_1) = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& [id, \mathrm{V}] \cdot (id + \mathsf{map}\ (\![id, \mathrm{V}]\!)) \cdot i_1 = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& [id, \mathrm{V}] \cdot i_1 = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}
$$

e

$$
\begin{array}{ll}
& \mu \cdot \mathsf{T}\ u = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& (\![id, \mathrm{V}]\!) \cdot (\mathsf{T}\ u) = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& (\![id, \mathrm{V}] \cdot \mathsf{B}\ (u, id)]\!) = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& (\![id, \mathrm{V}] \cdot (\mathrm{U} + id)]\!) = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& (\![\mathrm{U}, \mathrm{V}]\!) = id \\
\equiv & \{ \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \ \} \\
& \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO: Primeiro passo:

$$
\begin{array}{ll}
& \mu \cdot u = id \\
\equiv & \{ \ \mu = (\![id, \mathrm{V}]\!);\ u = \mathrm{U};\ \mathsf{in}_{\mathsf{T}} = [\mathrm{U}, \mathrm{V}];\ \text{cancelamento-+ (18)} \ \}
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
& (\![[id, \mathrm{v}]]\!) \cdot (\mathsf{in}_{\mathsf{T}} \cdot i_1) = id \\
\equiv \quad & \{ \text{ cancelamento-cata (44) } \} \\
& [id, \mathrm{v}] \cdot (id + \mathsf{map}\ (\![[id, \mathrm{v}]]\!)) \cdot i_1 = id \\
\equiv \quad & \{ \text{ natural-}i_1 \text{ (23) e natural-}id \text{ (1) } \} \\
& [id, \mathrm{v}] \cdot i_1 = id \\
\equiv \quad & \{ \text{ cancelamento-+ (18) } \} \\
& true
\end{aligned}$$

□

Segundo passo:

$$\begin{aligned}
& \mu \cdot \mathsf{T}\ u = id \\
\equiv \quad & \{ \ \mu = (\![[id, \mathrm{v}]]\!) \ \} \\
& (\![[id, \mathrm{v}]]\!) \cdot (\mathsf{T}\ u) = id \\
\equiv \quad & \{ \text{ absorção-cata (48) } \} \\
& (\![[id, \mathrm{v}] \cdot \mathsf{B}\ (u, id)]\!) = id \\
\equiv \quad & \{ \text{ functor de base } \mathsf{B}\ (f, g) = f + \mathsf{map}\ g;\ u = \mathrm{u};\ \text{functor-}id \text{ (42) } \} \\
& (\![[id, \mathrm{v}] \cdot (\mathrm{u} + id)]\!) = id \\
\equiv \quad & \{ \text{ absorção-+ (22) e natural-}id \text{ (1), 2 vezes } \} \\
& (\![[\mathrm{u}, \mathrm{v}]]\!) = id \\
\equiv \quad & \{ \ [\mathrm{u}, \mathrm{v}] = \mathsf{in}_{\mathsf{T}}\ ;\ \text{reflexão-cata (45) } \} \\
& true
\end{aligned}$$

□

□

ANEXO — Catálogo de tipos de dados estudados na disciplina.

1. Números naturais:

$$\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + X \\ \mathsf{F}\ f = id + f \end{array} \right. \qquad \mathsf{in}_{\mathsf{T}} = [\underline{0}, \mathsf{succ}] \tag{E10}$$

Haskell: Int inclui $\mathbb{N}_0$.

2. Listas de elementos em A:

$$\mathsf{T} = A^* \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f \end{array} \right. \qquad \mathsf{in}_{\mathsf{T}} = [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}] \tag{E11}$$

Haskell: $[\,a\,]$.

3. Árvores com informação de tipo A nos nós:

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in}_{\mathsf{T}} = [\underline{Empty}, Node] \tag{E12}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$.

4. Árvores com informação de tipo A nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in}_{\mathsf{T}} = [Leaf, Fork] \tag{E13}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ \ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$.

5. Árvores com informação nos nós e nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{FTree}\ B\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = B + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in}_{\mathsf{T}} = [Unit, Comp] \tag{E14}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ b\ a = Unit\ b \mid Comp\ (a, (\mathsf{FTree}\ b\ a, \mathsf{FTree}\ b\ a))$.