Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2014/15

Teste — 16 de Junho de 2015
20h00
Salas CPII 201, 202, 203

---

*Este teste consta de **10** questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

PROVA SEM CONSULTA (2h30m)

Questão 1 Recorra às leis que conhece dos produtos, coprodutos e funções constantes para demonstrar a igualdade:

$$[\langle f, \underline{k}\rangle, \langle g, \underline{k}\rangle] = \langle [f, g], \underline{k}\rangle \tag{E1}$$

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{ll}
& [\langle f, \underline{k}\rangle, \langle g, \underline{k}\rangle] \\
= & \quad \{ \text{ lei da troca } \} \\
& \langle [f, g], [\underline{k}, \underline{k}]\rangle \\
= & \quad \{ \text{ natural-id (2 vezes); fusão-+ } \} \\
& \langle [f, g], \underline{k} \cdot [id, id]\rangle \\
= & \quad \{ \text{ função constante } \} \\
& \langle [f, g], \underline{k}\rangle
\end{array}
$$

□

Questão 2 Suponha que apenas sabe a seguinte propriedade de uma dada função α,

$$\alpha \cdot \langle f, \langle g, h\rangle\rangle = \langle h, f\rangle \tag{E2}$$

válida para quaisquer f, g e h que a tipem correctamente.

Deduza a definição de α e, a partir do seu tipo mais geral, a respectiva propriedade *natural* (também chamada *grátis*) usando o habitual diagrama.

RESOLUÇÃO: A propriedade dar-nos-á uma definição de α desde que consigamos anular o termo $\langle f, \langle g, h\rangle\rangle$ em (E2), ou seja, reduzi-lo à identidade:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle f, \langle g, h\rangle\rangle = id \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal-}\times \text{ ou reflexão-}\times \text{ seguida de eq-}\times \}
\end{array}
$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \pi_1 \\ \langle g, h \rangle = \pi_2 \end{array} \right.$$

$\equiv$ { universal-$\times$ }

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \pi_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} g = \pi_1 \cdot \pi_2 \\ h = \pi_2 \cdot \pi_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\Box$

Logo, voltando a (E2) :

$$\alpha \cdot \langle \pi_1, \langle \pi_1 \cdot \pi_2, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle = \langle \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_1 \rangle$$

$\equiv$ { cálculo acima: $\langle \pi_1, \langle \pi_1 \cdot \pi_2, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle = id$; natural-id }

$$\alpha = \langle \pi_2 \cdot \pi_2, \pi_1 \rangle$$

Logo α tem tipo $B \times C \leftarrow C \times (A \times B)$ de que decorre, fazendo o diagrama habitual, a propriedade grátis $\alpha \cdot (h \times (f \times g)) = (g \times h) \cdot \alpha$. $\Box$

Questão 3 Considere a função $\alpha = [\overline{i_1}\ , \overline{i_2}]$.

- Calcule o tipo mais geral de α, representando-o através de um diagrama.
- $\widehat{\alpha}$ é um isomorfismo que conhece. Identifique-o através da inferência do respectivo tipo.

NB: $\overline{f}$ e $\widehat{f}$ abreviam $curry\ f$ e $uncurry\ f$, respectivamente.

RESOLUÇÃO:

- i_1 tem tipo genérico $A \rightarrow A{+}B$; para poder ser 'curried' terá que ser $A{:=}A{\times}C$, isto é $A \times C \xrightarrow{i_1} A \times C + B$ e $A \xrightarrow{\overline{i_1}} (A \times C + B)^C$
- i_2 tem tipo genérico $B' \rightarrow A' + B'$ e pelo mesmo raciocínio obtém-se $B' \times C' \xrightarrow{i_2} A' + B' \times C'$ e $B' \xrightarrow{\overline{i_2}} (A' + B' \times C')^{C'}$.
- Como $\overline{i_1}$ e $\overline{i_2}$ têm de ter, em α, o mesmo tipo de saída, ter-se-á $A' := A \times C$, $B := B' \times C'$ e $C := C'$, o que dará

$$A + B' \xrightarrow{\alpha = [\overline{i_1}\ , \overline{i_2}]} (A \times C + B' \times C)^C$$

- Finalmente, tem-se $\widehat{\alpha} : (A + B') \times C \rightarrow A \times C + B' \times C$ isto é, $\widehat{\alpha} = \mathsf{undistl}$.

$\Box$

Questão 4 Demonstre a seguinte propriedade do combinador condicional de McCarthy

$$(p \rightarrow g, h) \times f \quad = \quad p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f, h \times f \tag{E3}$$

sabendo que

$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle \quad = \quad p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{E4}$$

se verifica.

RESOLUÇÃO: Como os condicionais em (E3) e (E4) estão em lados diferentes, vamos usar swap para fazer a necessária troca:

$$
\begin{array}{ll}
& (p \rightarrow g, h) \times f \\
= & \quad \{ \text{ swap é isomorfismo, logo } \mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap} = id \,;\, f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \} \\
& \mathsf{swap} \cdot \mathsf{swap} \cdot \langle (p \rightarrow g, h) \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle \\
= & \quad \{ \ \mathsf{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle \,;\, \text{fusão-}\times\text{; cancelamento-}\times \ \} \\
& \mathsf{swap} \cdot \langle f \cdot \pi_2, (p \rightarrow g, h) \cdot \pi_1 \rangle \\
= & \quad \{ \text{ McCarthy (2.}^{\text{a}} \text{ lei) ; (E4) } \} \\
& \mathsf{swap} \cdot (p \cdot \pi_1 \rightarrow \langle f \cdot \pi_2, g \cdot \pi_1 \rangle, \langle f \cdot \pi_2, h \cdot \pi_1 \rangle) \\
= & \quad \{ \text{ McCarthy (1.}^{\text{a}} \text{ lei) ; } \mathsf{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle \text{ ; cancelamento-}\times \ \} \\
& p \cdot \pi_1 \rightarrow f \times g, f \times h
\end{array}
$$

□

Questão 5 Suponha dado o catamorfismo $f = (\![\mathsf{zero} \,,\, least]\!)$ definido sobre listas de números naturais ($\mathbb{N}_0$), para $\mathsf{zero}\ \_ = 0$ e $least\ (x, y) = \textbf{if}\ x \leqslant y\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ y$. Demonstre que f é uma função constante $\underline{k}$, identificando o valor de k.

RESOLUÇÃO: Tratando-se de listas, temos $\mathsf{F}\,f = id + id \times f$ e $\mathsf{in} = [\mathsf{nil} \,,\, \mathsf{cons}]$. Tem-se então:

$$
\begin{array}{ll}
& \underline{k} = (\![\mathsf{zero} \,,\, least]\!) \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal-cata } \} \\
& \underline{k} \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{zero} \,,\, least] \cdot (id + id \times \underline{k}) \\
\equiv & \quad \{ \text{ absorção-}+\text{; fusão-}+ \text{ sobre } \mathsf{in} = [\mathsf{nil} \,,\, \mathsf{cons}]\text{; Eq-}+ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \underline{k} \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{zero} \\ \underline{k} \cdot \mathsf{cons} = least \cdot (id \times \underline{k}) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ função constante } \underline{k} \text{ (duas vezes); função constante zero } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ \underline{k} = least \cdot (id \times \underline{k}) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ introdução de variáveis numa composição de funções; função constante } \underline{k} \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ k = least\ (x, k) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ definição de } least \text{ ; } k = 0 \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ 0 = \textbf{if}\ x \leqslant 0\ \textbf{then}\ x\ \textbf{else}\ 0 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ 0 \text{ é o menor número natural } (\mathbb{N}_0) \ \} \\
& k = 0
\end{array}
$$

□

Assim se deduz que $k = 0$ e $f = \underline{0} = \mathsf{zero}$. □

Questão 6 Pretendendo-se uma função que conte o número de folhas de uma LTree apareceram duas soluções: uma é o catamorfismo

$$count = (\![\mathsf{one}\ ,\mathsf{add}]\!) \tag{E5}$$

onde $\mathsf{one} = \underline{1}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$; a outra,

$$count = \mathsf{length} \cdot tips \tag{E6}$$

baseia-se em duas funções que conhece das bibliotecas e trabalho prático da disciplina.

Recorrendo à lei de fusão dos catamorfismos, entre outras, mostre que as duas propostas (E5) e (E6) são a mesma função.

NB: recorda-se que o functor de base do tipo LTree é $\mathsf{B}\ (f, g) = f + g \times g$; não precisa de provar a propriedade $\mathsf{length}\ (x +\!\!+ y) = (\mathsf{length}\ x) + (\mathsf{length}\ y)$, se dela precisar.

RESOLUÇÃO: Da biblioteca LTree sabemos que $tips = (\![singl\ ,\mathsf{conc}]\!)$, onde $singl\ a = [a]$ e $\mathsf{conc} = \widehat{+\!\!+}$. Então:

$$
\begin{array}{ll}
& count = \mathsf{length} \cdot tips \\
\equiv & \quad \{\ (E5)\ ;\ tips = (\![singl\ ,\mathsf{conc}]\!)\ \} \\
& (\![\mathsf{one}\ ,\mathsf{add}]\!) = \mathsf{length} \cdot (\![singl\ ,\mathsf{conc}]\!) \\
\Leftarrow & \quad \{\ \text{fusão-cata para } \mathsf{F}\ f = \mathsf{B}\ (id, f) = id + f \times f\ \} \\
& \mathsf{length} \cdot [singl\ ,\mathsf{conc}] = [\mathsf{one}\ ,\mathsf{add}] \cdot (id + \mathsf{length} \times \mathsf{length}) \\
\equiv & \quad \{\ \text{absorção-+; fusão-+; Eq-+}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{length} \cdot singl = \mathsf{one} \\ \mathsf{length} \cdot \mathsf{conc} = \mathsf{add} \cdot (\mathsf{length} \times \mathsf{length}) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{introdução de variáveis; } singl\ x = [x]\ ;\ \mathsf{conc} = \widehat{+\!\!+};\ (f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{length}\ [a] = 1 \\ \mathsf{length}\ (x +\!\!+ y) = (\mathsf{length}\ x) + (\mathsf{length}\ y) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ [a] \text{ só tem um elemento; propriedade dada}\ \} \\
& true
\end{array}
$$

□

Questão 7 Considere o tipo

$$\mathbf{data}\ \mathsf{TLTree}\ a = \mathsf{T}\ a \mid N\ (\mathsf{TLTree}\ a)\ (\mathsf{TLTree}\ a)\ (\mathsf{TLTree}\ a)$$

semelhante ao que foi usado no trabalho prático desta disciplina para manipular triângulos de Sierpinski.

- Defina $\mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}}$ e $\mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}}$ por forma a que o functor de base deste tipo seja $\mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (f, g) = f + ((g \times g) \times g)$
- Defina o functor de tipo $\mathsf{TLTree}\, f$ [1] sob a forma de um anamorfismo e derive a sua implementação em Haskell com variáveis.

RESOLUÇÃO: Da sintaxe do tipo dado infere-se:

[1] Isto é, $fmap\ f$ em Haskell, após instância deste tipo na classe Functor.

$\mathsf{T} : a \to \mathsf{TLTree}\ a$
$N : \mathsf{TLTree}\ a \to \mathsf{TLTree}\ a \to \mathsf{TLTree}\ a \to \mathsf{TLTree}\ a$

Teremos que construir $\mathsf{TLTree}\ a \xleftarrow{\mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}}} \mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (a, \mathsf{TLTree}\ a)$ e a definição dada para $\mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (f, g)$ sugere

$$\mathsf{TLTree}\ a \xleftarrow{\mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}}} a + ((\mathsf{TLTree}\ a \times \mathsf{TLTree}\ a) \times \mathsf{TLTree}\ a)$$

O construtor T pode de imediato ser usado em $\mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}}$ mas N não pode, pois está *curried*. Logo temos que usar *uncurry* para o ajustar ao functor de base pretendido:

$$\mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}} = [\mathsf{T}\ , \widehat{\widehat{N}}] \tag{E7}$$

Pelo método habitual e sabendo que $\widehat{f}\ (a, b) = f\ a\ b$ obtém-se:

$$\mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}}\ (\mathsf{T}\ a) = i_1\ a$$
$$\mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}}\ (N\ x\ y\ b) = i_2\ ((x, y), b))$$

Cálculo de $\mathsf{TLTree}\,f$: tem-se, pela definição (50) do formulário, $\mathsf{TLTree}\,f = [\!(\mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (f, id) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}})\!]$. Logo:

$$
\begin{array}{ll}
& \mathsf{TLTree}\,f = [\!(\mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (f, id) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}})\!] \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal-ana}\ \} \\
& \mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}} \cdot \mathsf{TLTree}\,f = \mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (id, \mathsf{TLTree}\,f) \cdot \mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (f, id) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}} \\
\equiv & \quad \{\ \text{isomorfismo } (\mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}})^{\circ} = \mathsf{out}_{\mathsf{TLTree}}\ \text{; bifunctor } \mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ \} \\
& \mathsf{TLTree}\,f \cdot \mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}} = \mathsf{in}_{\mathsf{TLTree}} \cdot \mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (f, \mathsf{TLTree}\,f) \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{F}\ f = \mathsf{B}_{\mathsf{TLTree}}\ (id, f) = id + ((f \times f) \times f)\ \text{; (E7) ; abreviando } g = \mathsf{TLTree}\,f\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{TLTree}\,f \cdot \mathsf{T} = \mathsf{T} \cdot f \\ \mathsf{TLTree}\,f \cdot \widehat{\widehat{N}} = \widehat{\widehat{N}} \cdot ((g \times g) \times g)\ \textbf{where}\ g = \mathsf{TLTree}\,f \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{introdução de variáveis ; } (f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{TLTree}\,f\ (\mathsf{T}\ a) = \mathsf{T}\ (f\ a) \\ \mathsf{TLTree}\,f\ (\widehat{\widehat{N}}\ ((x, y), z)) = \widehat{\widehat{N}}\ ((g\ x, g\ y), g\ z)\ \textbf{where}\ g = \mathsf{TLTree}\,f \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \widehat{f}\ (a, b) = f\ a\ b\ \text{duas vezes}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{TLTree}\,f\ (\mathsf{T}\ a) = \mathsf{T}\ (f\ a) \\ \mathsf{TLTree}\,f\ (N\ x\ y\ z) = N\ (g\ x)\ (g\ y)\ (g\ z)\ \textbf{where}\ g = \mathsf{TLTree}\,f \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{substituição da abreviatura } g \text{ por } \mathsf{TLTree}\,f\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{TLTree}\,f\ (\mathsf{T}\ a) = \mathsf{T}\ (f\ a) \\ \mathsf{TLTree}\,f\ (N\ x\ y\ z) = N\ (\mathsf{TLTree}\,f\ x)\ (\mathsf{TLTree}\,f\ y)\ (\mathsf{TLTree}\,f\ z) \end{array} \right.
\end{array}
$$

□

Questão 8 Recorde do trabalho prático a função $depth = (\![\mathsf{one}\ , \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}]\!)$ que calcula a profundidade de árvores de tipo LTree.

Mostre que a profundidade de uma árvore t não é alterada quando aplica uma função f a todas as suas folhas; isto é, use as leis dos catamorfismos para provar a propriedade:

$$depth \cdot \mathsf{LTree}\ f = depth \tag{E8}$$

RESOLUÇÃO: Estamos em LTree, em que $\mathsf{B}\ (f, g) = f + g \times g$, logo $\mathsf{B}\ (f, id) = f + id$. É quase imediato:

$$
\begin{array}{cl}
& depth \cdot \mathsf{LTree}\ f = depth \\
\equiv & \qquad \{\ depth = (\![\mathsf{one}\ , \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}]\!)\ ;\ \text{absorção-cata em LTree, para } \mathsf{B}\ (f, id) = f + id\ \} \\
& (\![\mathsf{one}\ , \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}] \cdot (f + id)]\!) = depth \\
\equiv & \qquad \{\ \text{absorção-}+\ ;\ \text{função constante one}\ \} \\
& (\![\mathsf{one}\ , \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}]\!) = depth \\
\equiv & \qquad \{\ \text{definição dada para } depth\ \} \\
& true \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 9 O apuramento do valor médio das folhas (valores numéricos) de uma árvore binária t

$$avg\ t = \frac{\mathsf{sum}\ t}{count\ t}$$

de tipo LTree mostra a necessidade de duas travessias de t, uma feita por $\mathsf{sum} = (\![id\ , \mathsf{add}]\!)$ e a outra por $count = (\![\underline{1}\ , \mathsf{add}]\!)$, onde $\mathsf{add} = \widehat{+}$. A lei de "banana-split"

$$\langle (\!|i|\!), (\!|j|\!) \rangle = (\!|h|\!) \quad \Leftarrow \quad h = \langle i \cdot \mathsf{F}\ \pi_1, j \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle \qquad \text{(E9)}$$

permite fazer o mesmo apuramento com uma só travessia, obtendo-se:

$$
\begin{array}{l}
avg\ t = n\ /\ d\ \mathbf{where} \\
\quad (n, d) = aux\ t \\
\qquad aux\ (Leaf\ a) = (a, 1) \\
\qquad aux\ (Fork\ (x, y)) = (n1 + n2, d1 + d2)\ \mathbf{where} \\
\qquad\quad (n1, d1) = aux\ (Fork\ x) \\
\qquad\quad (n2, d2) = aux\ (Fork\ y)
\end{array}
$$

Complete as reticências nos seguintes passos que já se deram no processo de conversão do par ("split") de catamorfismos sum e *count* num único catamorfismo, de que o algoritmo acima deriva:

$$
\begin{array}{cl}
& \langle \mathsf{sum}, count \rangle = (\!|h|\!) \\
\equiv & \qquad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \langle (\![id\ , \mathsf{add}]\!), (\![\underline{1}\ , \mathsf{add}]\!) \rangle = (\!|h|\!) \\
\Leftarrow & \qquad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& h = \langle [id\ , \mathsf{add}] \cdot \mathsf{F}\ \pi_1, [\underline{1}\ , \mathsf{add}] \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle \\
\equiv & \qquad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& h = \langle [id\ , \mathsf{add}] \cdot (id + \pi_1 \times \pi_1), [\underline{1}\ , \mathsf{add}] \cdot (id + \pi_2 \times \pi_2) \rangle \\
\equiv & \qquad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\equiv & \qquad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\equiv & \qquad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& h = [\langle id, \underline{1} \rangle\ , h2]\ \mathbf{where}\ h2\ ((n1, d1), (n2, d2)) = (n1 + n2, d1 + d2)
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle \mathsf{sum}, count \rangle = (\!|h|\!) \\
\equiv & \quad \{ \text{ definições de } \mathsf{sum} \text{ e } count \ \} \\
& \langle (\!|[id\ , \mathsf{add}]|\!), (\!|[\underline{1}\ , \mathsf{add}]|\!) \rangle = (\!|h|\!) \\
\Leftarrow & \quad \{ \text{ (E9) } \} \\
& h = \langle [id\ , \mathsf{add}] \cdot \mathsf{F}\ \pi_1, [\underline{1}\ , \mathsf{add}] \cdot \mathsf{F}\ \pi_2 \rangle \\
\equiv & \quad \{ \ \mathsf{F}\ f = id + f \times f \text{ duas vezes } \} \\
& h = \langle [id\ , \mathsf{add}] \cdot (id + \pi_1 \times \pi_1), [\underline{1}\ , \mathsf{add}] \cdot (id + \pi_2 \times \pi_2) \rangle \\
\equiv & \quad \{ \text{ absorção-}+ \text{ e natural-}id \text{ (duas vezes) } \} \\
& h = \langle [id\ , \mathsf{add} \cdot (\pi_1 \times \pi_1)], [\underline{1}\ , \mathsf{add} \cdot (\pi_2 \times \pi_2)] \rangle \\
\equiv & \quad \{ \text{ lei da troca } \} \\
& h = [\langle id, \underline{1} \rangle\ , \langle \mathsf{add} \cdot (\pi_1 \times \pi_1), \mathsf{add} \cdot (\pi_2 \times \pi_2) \rangle] \\
\equiv & \quad \{ \text{ introdução de } h2 = \langle \mathsf{add} \cdot (\pi_1 \times \pi_1), \mathsf{add} \cdot (\pi_2 \times \pi_2) \rangle \text{; introdução de variáveis } \} \\
& h = [\langle id, \underline{1} \rangle\ , h2] \ \mathbf{where}\ h2\ ((n1, d1), (n2, d2)) = (n1 + n2, d1 + d2)
\end{array}
$$

□

Questão 10 O functor

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{T}\ X = X \times X \\
\mathsf{T}\ f = f \times f
\end{array}
$$

oferece um mónade que nos permite trabalhar com pares encarados como vectores (y, x) a duas dimensões. Por exemplo, neste mónade a expressão

$$\mathbf{do}\ \{x \leftarrow (2,3); y \leftarrow (4,5); \mathsf{return}\ (x + y)\}$$

dá $(6, 8)$ como resultado — a soma dos vectores $(2, 3)$ e $(4, 5)$. Definindo

$$\mu = \pi_1 \times \pi_2 \tag{E10}$$

$$u = \langle id, id \rangle \tag{E11}$$

para este functor T, demonstre que μ e u satisfazem as propriedades (58) e (57) do formulário, essenciais à evidência de que

$$X \xrightarrow{u} \mathsf{T}\ X \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ X)$$

é, de facto, um mónade.

RESOLUÇÃO: Cálculo de (57):

$$
\begin{array}{ll}
& \mu \cdot \mathsf{T}\ \mu \\
= & \quad \{ \text{ (E10) duas vezes ; } \mathsf{T}\ f = f \times f \ \} \\
& (\pi_1 \times \pi_2) \cdot ((\pi_1 \times \pi_2) \times (\pi_1 \times \pi_2))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
= & \quad \{ \text{ functor-}\times \text{ ; natural-}\pi_1 \text{ ; natural-}\pi_2 \ \} \\
& (\pi_1 \cdot \pi_1) \times (\pi_2 \cdot \pi_2) \\
= & \quad \{ \text{ functor-}\times \text{ ; (E10) } \} \\
& \mu \cdot \mu \\
\Box &
\end{array}
$$

Cálculo de (58):

$$
\begin{array}{ll}
& \mu \cdot u = id = \mu \cdot \mathsf{T}\ u \\
\equiv & \quad \{ \text{ (E10) ; (E11) } \} \\
& (\pi_1 \times \pi_2) \cdot \langle id, id \rangle = id = (\pi_1 \times \pi_2) \cdot \mathsf{T}\ u \\
\equiv & \quad \{ \text{ absorção-}\times \text{ ; } \mathsf{T}\, f = f \times f\text{; functor-}\times \ \} \\
& \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id = (\pi_1 \cdot u) \times (\pi_2 \cdot u) \\
\equiv & \quad \{ \text{ (E11) ; cancelamento-}\times \ \} \\
& \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id = id \times id \\
\equiv & \quad \{ \text{ reflexão-}\times \text{ e functor-}\times\text{-id } \} \\
& true \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$
