Universidade do Minho

2003/2004	1.º Semestre ☐ 2.º Semestre ☒ Anual ☐
DISCIPLINAS Métodos Formais de Programação II (7008N2) + Opção II — Métodos Formais de Programação II (5308P3) CURSOS LMCC + LESI	DOCENTE J.N. Oliveira – 406006

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.02.25 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Apresentação da disciplina. Equipa docente. Programa da disciplina e seu enquadramento no plano de estudos. Regime de avaliação. Bibliografia. Informação electrónica sobre a disciplina: `www.di.uminho.pt/~jno/html/mii.html`. Noções gerais de arquitectura de 'software'. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.01 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Revisões de *Métodos Formais de Programação I*: resolução de questões dos exames. Inscrições nas turmas práticas. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.01 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.03.03 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Introdução às técnicas de refinamento (reificação) de especificações formais. Taxonomia de relações. Simplicidade, sobrejectividade, injectividade e totalidade. Princípio da abstracção dos dados. Relações de abstracção e de representação. Dualidade. Inequações de refinamento da forma $A \leq B$. Exemplos. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.08 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Revisões de *Métodos Formais de Programação I*: resolução de questões dos exames. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.08 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 03.05.10 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (ausência do docente em reunião interna). O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.15 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Revisões de *M´etodos Formais de Programaç ˜ao I*: resolução de questões dos exames. O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.15 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.03.17 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados :* lei da representação por "*apontador*": $$A \quad \leq \quad A+1$$ Estudo do isomorfismo de totalização de correspondências: $$A \rightharpoonup B \quad \cong \quad (B+1)^A$$ O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.22 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Resolução dos exercícios seguintes: • Qualquer sequência finita pode ser representada por uma função finita que indica, explicitamente, que elemento ocupa que posição na sequência. Por exemplo, a sequência $[a, b, a]$ é representada por $\{1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto a\}$. Especifique em VDM-SL a representação $seq2fm$ e a abstracção $fm2seq$ que justificam a inequação $$\mathtt{seq\,of}\,A \quad \leq \quad \mathtt{map}\,nat\,\mathtt{to}\,A \qquad (1)$$ Por que razão é que a lei acima não é um isomorfismo? • Os seguintes quatro exemplos de representação, em notação VDM-SL, da sequência $[a, b, c]$, $$\begin{array}{rcl} r_1 & = & \{2 \mapsto b, 1 \mapsto a, 3 \mapsto c\} \\ r_2 & = & \{a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3\} \\ r_3 & = & \{a, b, c\} \\ r_4 & = & [(a, a), (b, b), (c, c)] \end{array}$$ sugerem outros tantos refinamentos possíveis para sequências. Defina o modelo de dados sugerido por cada exemplo e discuta a sua adequação. Em cada caso, indique um contra-exemplo (i.é uma sequência não representável) ou as respectivas funções de abstracção / representação. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.03.24 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados :* Propriedades da relação $\leq$: reflexividade e transitividade e suas provas. Relacionadores e o refinamento estruturado. Leis de refinamento de conjuntos finitos. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.29 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Resolução dos exercícios seguintes: • Especificar em VDM-SL as funções de abstracção e de representação das seguintes equações de refinamento: $$\begin{array}{rcl} 1 \rightharpoonup A & \cong & A + 1 \\ \mathcal{P}A & \leq & HTable \end{array}$$ onde $HTable = \mathtt{map}\,nat\,\mathtt{to\,set\,of}\,A$ sujeita ao invariante $inv\ t = \forall n \in dom\,t. \forall a \in t(n). h(a) = n$. • Provar, por fusão-cata, que a inversão de listas é função de abstracção e a sua própria representação. O DOCENTE ______________

Aula	Sumário
Teórica 2004.03.31 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.) : Estudo do repertório de* inequações de refinamento *e respectivas funções de abstracção e de representação:* $$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}A & \leq & A^\star \\ \mathcal{P}A & \leq & \mathbb{N} \rightharpoonup A \\ \mathcal{P}A & \leq & A \rightharpoonup B \\ \mathcal{P}A & \leq & A \rightharpoonup \mathbb{N} \\ A \rightharpoonup (B+C) & \leq & (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C) \\ (C \times A) \rightharpoonup B & \leq & C \rightharpoonup (A \rightharpoonup B) \\ \mathcal{P}(A \times C) & \cong & (\mathcal{P}A)^C \end{array}$$ O Docente ________________

Aula	Sumário
Prática 2004.04.05 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Resolução dos exercícios seguintes: 1.Com base nas propriedades seguintes, $$[R,S]\cdot[T,U]^\circ = (R\cdot T^\circ)\cup(S\cdot U^\circ) \quad (2)$$ $$\langle R,S\rangle^\circ\cdot\langle X,Y\rangle = (R^\circ\cdot X)\cap(S^\circ\cdot Y) \quad (3)$$ prove que $[\_,\_]$ preserva abstracções e que $\langle \_,\_ \rangle$ preserva representações. Isto é, mostre que $\langle R,S\rangle$ (resp. $[R,S]$) é uma relação de representação (resp. abstracção) sempre que R e S individualmente o são. 2.Considere a propriedade $$\mathit{img}\ i_1 \cup \mathit{img}\ i_2 = id \quad (4)$$ e (a) mostre que ela capta a ideia da união disjunta de A e B expressa em $$\forall x \in A+B.(\exists a \in A\ .\ x = i_1\ a) \vee (\exists b \in B\ .\ x = i_2\ b) \quad (5)$$ O Docente ________________

Aula	Sumário
Prática 2004.04.05 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O Docente ________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.07 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.) :* estudo da lei $$A \rightharpoonup D \times (B \rightharpoonup C) \quad \leq \quad (A \rightharpoonup D) \times ((A \times B) \rightharpoonup C) \qquad (6)$$ O DOCENTE ______________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.14 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.) :* Teorema de desrecursivação genérica: $$\mu\mathsf{F} \quad \leq \quad (K \rightharpoonup \mathsf{F}\,K) \times K \qquad (7)$$ Função de abstracção e invariante concreto. Relações de pertença estrutural ($\in_{\mathsf{F}}$) e acessibilidade estrutural ($\prec_\sigma$). O DOCENTE ______________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.19 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Não houve aula (dispensa dos alunos para assistirem às JOIN'04). O DOCENTE ______________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.19 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Não houve aula (dispensa dos alunos para assistirem às JOIN'04). O DOCENTE ______________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.21 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (dispensa dos alunos para assistirem às JOIN'04). O DOCENTE ______________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.26 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Exercícios de refinamento relacional dos modelos $BAMS$ e PPD das sessões de laboratório das aulas de *M´etodos Formais de Programaç ˜ao I*. Breve apresentação da ferramenta desenvolvida para este efeito em *Laborat´orio de M´etodos Formais*. O DOCENTE ______________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.26 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.28 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.)* : conclusão do estudo das noções de pertença ($\in_{\mathsf{F}}$) e acessibilidade estrutural associados à lei (7). Breve abordagem ao refinamento por identificação de classes em UML. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.03 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Exercício de desrecursivação do modelo $GenDia ::\ indiv : token$ /*data about an individual */ $mother : [GenDia]$ /*genealogy of his/her mother (if known) */ $father : [GenDia]$ /*genealogy of his/her father (if known) */ Cálculo de $\in_{\mathsf{F}} \; = \; i_2^{\circ} \cdot \pi_2 \cup i_2^{\circ} \cdot \pi_3$ (8) Cálculo de $\prec_{\sigma} = \in_{\mathsf{F}} \cdot \sigma$ (9) e da sua expressão em notação VDM-SL. Cálculo das funções de abstracção e de representação associadas ao refinamento do modelo PPD. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.03 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ______________

Aula	Sumário
Teórica 2003.05.05 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Técnicas de refinamento algorítmico (introdução) :* A *eficiência* como principal motivação para o refinamento algorítmico. Lei de refinamento funcional —satisfação de uma especificação implícita S por uma função f: $$S \vdash f \quad \equiv \quad f \cdot dom\, S \subseteq S \qquad (10)$$ Exemplo: resolução da equação $$IsPermutation \vdash f$$ em ordem a f, sabendo que $IsPermutation = ker\ seq2bag$, onde $$\begin{array}{rcll} seq2bag & = & (\|[bnil, bcons]\|) & (11) \\ bnil & = & \underline{\{\mapsto\}} & (12) \\ bcons & = & \oplus \cdot (singb \times id) & (13) \\ singb\ a & = & \{a \mapsto 1\} & (14) \end{array}$$ O DOCENTE ________________

Aula	Sumário
Prática 2004.05.10 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata). O DOCENTE ________________

Aula	Sumário
Prática 2004.05.10 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata). O DOCENTE ________________

Aula	Sumário
Teórica 2004.05.12 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata). O DOCENTE ________________

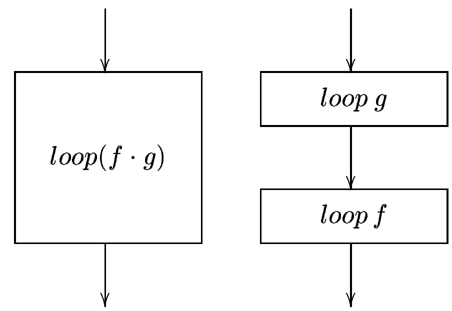
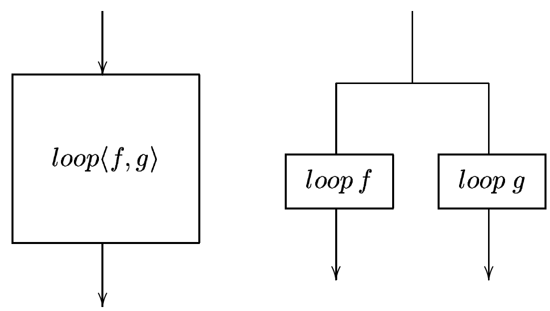
Aula	Sumário
Prática 2004.05.17 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Cálculo de funções de representação e de abstracção. Exemplos BAMS e PPD e sua animação em VDM. O DOCENTE ________________

Aula	Sumário
Prática 2004.05.17 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ____________

Aula	Sumário
Teórica 2004.05.19 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Técnicas de refinamento algorítmico (cont.) :* propriedades da relação $\vdash$: $\bot \vdash f \quad , \quad \top \vdash f$ (15) $(S \cup R) \vdash f \Leftarrow S \vdash f \wedge R \vdash f$ (16) $(S \cap R) \vdash f \Leftarrow S \vdash f \wedge R \vdash f$ (17) $(\mathit{ker}\, g) \vdash f \equiv g \cdot f = g$ (18) $g \vdash f \equiv f = g$ (19) Exemplo: refinamento de $IsPermutation$. Leis de refinamento relacional —satisfação progressiva de uma especificação implícita S por outra especificação R: $S \vdash R \equiv R \cdot \mathit{dom}\, S \subseteq S \wedge \mathit{dom}\, S \subseteq \mathit{dom}\, R$ (20) Exemplos. Propriedades de ordem parcial da relação $\vdash$. Propriedade de F-monotonia. O DOCENTE ____________

Aula	Sumário
Prática 2004.05.24 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Demonstração das propriedades (15) a (19). Resolução da questão 5 do exame de 12 de Julho de 2003 e da última questão do exame de 22 de Julho 2003 (parte). O DOCENTE ____________

Aula	Sumário
Prática 2004.05.24 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.05.26 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Técnicas de refinamento (cont.): Lei de refinamento de simultâneo de dados e algoritmos: dada uma especificação $B \xleftarrow{S} A$, uma função de abstracção $A \xleftarrow{F_1} C$ e uma relação de representação $D \xleftarrow{R_2} B$, então dir-se-á que $C \xleftarrow{I} D$ *refina*, ou *implementa* S sse $$S \quad \vdash \quad F_1 \cdot I \cdot R_2 \qquad (21)$$ Casos particulares e exemplos. Refinamento funcional. Leis de fusão "vertical" de processos algorítmicos (leis functoriais, de fusão e de absorção):  Leis de fusão "horizontal" de processos algorítmicos:  A lei de Fokkinga e o seu corolários "banana-split". Exemplos de aplicação. O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO

Prática
2004.05.31
2.ª-feira, 09h00–11h00
DI-3 (LESI+LMCC)
	Resolução da última questão do exame de 22 de Julho 2003 (conclusão) partindo dos factos
	$$dom\ S = id \quad \Leftarrow \quad S \text{ é reflexiva} \tag{22}$$
	(todas as relações reflexivas são inteiras) e
	$$ker\ R \subseteq ker\,(S \cdot R) \quad \Leftarrow \quad S \text{ é inteira} \tag{23}$$
	Análise de tipos e hilomorfização das seguintes funções
	`j(x, y) == jaux(x, y,false);`
	`jaux(x, y,b) ==`
	`if y = [] or b then b else jaux(x, tl y, x = hd y );`
	
	`h(y) == haux(y, 1);`
	`haux(y,b) ==`
	`if y = [] or b=0 then b else haux(tl y, b * hd y );`
	
	`g(f, y) == gaux(f, y,);`
	`gaux(f,y,b) ==`
	`if y =  then b`
	`else let x in set y in gaux(f, y  x, f(x) union b );`
	
	`f(y) == faux(y, 1);`
	`faux(y, b) == if y = 0 then b else faux(y -1, y * b );`
	
	e sua interpretação como semântica funcional de ciclos “while”.
	Preenchimento dos inquéritos de avaliação das aulas práticas da disciplina.
	
	O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.31 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 03.06.02 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Previsto Técnicas de refinamento (conclusão): Introdução de parâmetros de acumulação. Desrecursivação algorítmica: cálculo de ciclos `for/while` [a]. Exemplos de codificação em C/C++. Inversão de código imperativo: o exemplo `wc` (“word count”). Preenchimento dos inquéritos de avaliação das aulas teóricas. Considerações finais. Encerramento da disciplina. O DOCENTE ____________________ [a] Ver *Operation refi nement*, June 2000. pp.125–131.

1 Adenda aos sumários de MFP-II/0304

1.1 Proof of (16), p. 8

$$
\begin{array}{cl}
& (S \cup R) \vdash f \\
\equiv & \{ \text{ definition (10) } \} \\
& f \cdot \mathit{dom}\,(S \cup R) \subseteq S \cup R \\
\equiv & \{ \cup\text{-distributivity ensured by composition of lower-adjoints } (f\cdot) \text{ and } \mathit{dom} \} \\
& (f \cdot \mathit{dom}\,S) \cup (f \cdot \mathit{dom}\,R) \quad \subseteq \quad S \cup R \\
\equiv & \{ \cup\text{-universal} \} \\
& (f \cdot \mathit{dom}\,S) \subseteq S \cup R \quad \wedge \quad (f \cdot \mathit{dom}\,R) \subseteq S \cup R \\
\Leftarrow & \{ \subseteq\text{-transitivity} \} \\
& (f \cdot \mathit{dom}\,S) \subseteq S \quad \wedge \quad (f \cdot \mathit{dom}\,R) \subseteq R \\
\equiv & \{ \text{ definition (10) } \} \\
& S \vdash f \quad \wedge \quad R \vdash f
\end{array}
$$

1.2 Proof of (17), p. 8

$$
\begin{array}{cl}
& (S \cap R) \vdash f \\
\equiv & \{ \text{ definition (10) } \} \\
& f \cdot \mathit{dom}\,(S \cap R) \subseteq S \cap R \\
\equiv & \{ \cap\text{-universal} \} \\
& f \cdot \mathit{dom}\,(S \cap R) \subseteq S \quad \wedge \quad f \cdot \mathit{dom}\,(S \cap R) \subseteq R \\
\Leftarrow & \{ \mathit{dom}\,(R \cap S) \subseteq (\mathit{dom}\,R) \cap (\mathit{dom}\,S); \text{ lower-adjoint } (f\cdot) \text{ is monotone} \} \\
& (f \cdot \mathit{dom}\,S) \subseteq S \quad \wedge \quad (f \cdot \mathit{dom}\,R) \subseteq R \\
\equiv & \{ \text{ definition (10) } \} \\
& S \vdash f \quad \wedge \quad R \vdash f
\end{array}
$$

1.3 Proof of (18), p. 8

$$
\begin{array}{cl}
& \mathit{ker}\,g \vdash f \\
\equiv & \{ \text{ definition } \} \\
& f \cdot \mathit{dom}\,(\mathit{ker}\,g) \subseteq \mathit{ker}\,g \\
\equiv & \{ \text{ kernel of a function } \} \\
& f \cdot id \subseteq g^{\circ} \cdot g \\
\equiv & \{ \text{ shunting rule } \} \\
& g \cdot f \subseteq g \\
\equiv & \{ \text{ equality of functions } \} \\
& g \cdot f = g
\end{array}
$$

1.4 Proof of (19), p. 8

$$
g \vdash f
$$

$$
\begin{array}{cl}
\equiv & \{ \text{ definition } \} \\
& f \cdot \mathit{dom}\, g \subseteq g \\
\equiv & \{ \text{ function } g \text{ is entire } \} \\
& f \cdot id \subseteq g \\
\equiv & \{ \text{ natural-}id \} \\
& f \subseteq g \\
\equiv & \{ \text{ equality of functions } \} \\
& f = g
\end{array}
$$

1.5 Proof of (22), p. 10

$$
\begin{array}{cl}
& \mathit{ker}\, S \text{ is reflexive} \\
\equiv & \{ \text{ definition } \} \\
& id \subseteq \mathit{ker}\, S \\
\equiv & \{ \text{ definition of kernel; natural-}id \} \\
& id \cdot id \subseteq S \cdot S^{\circ} \\
\Leftarrow & \{ \text{ composition is monotonic } \} \\
& id \subseteq S \wedge id \subseteq S^{\circ} \\
\equiv & \{ \text{ converses } (id^{\circ} = id) \} \\
& id \subseteq S \wedge id \subseteq S \\
\equiv & \{ \text{ trivia } \} \\
& id \subseteq S \\
\equiv & \{ \text{ definition } \} \\
& S \text{ is reflexive}
\end{array}
$$

1.6 Proof of (23), p. 10

$$
\begin{array}{cl}
& \mathit{ker}\, R \subseteq \mathit{ker}\, (S \cdot R) \\
\equiv & \{ \text{ kernel definition } \} \\
& R^{\circ} \cdot R \subseteq (S \cdot R)^{\circ} \cdot (S \cdot R) \\
\equiv & \{ \text{ converse of composition } \} \\
& R^{\circ} \cdot R \subseteq R^{\circ} \cdot S^{\circ} \cdot S \cdot R \\
\Leftarrow & \{ (R^{\circ} \cdot) \text{ and } (\cdot R) \text{ are lower-adjoints, thus monotonic } \} \\
& id \subseteq S^{\circ} \cdot S \\
\equiv & \{ \text{ definition of kernel } \} \\
& id \subseteq \mathit{ker}\, S \\
\equiv & \{ \text{ definition of entire relation } \} \\
& S \text{ is entire}
\end{array}
$$

Relational Operators as Galois Conections			
$(f\ X) \subseteq Y \equiv X \subseteq (g\ Y)$			
Description	$f = g^\flat$	$g = f^\sharp$	**Obs.**
converse	$(\_)^\circ$	$(\_)^\circ$	
Left-division	$(R\cdot)$	$(R \setminus\ )$	read "R under ..."
Right-division	$(\cdot R)$	$(\ / R)$	read "... over R"
shunting rule	$(f\cdot)$	$(f^\circ\cdot)$	NB: f is a function
"converse" shunting rule	$(\cdot f^\circ)$	$(\cdot f)$	NB: f is a function
range	*rng*	$(\cdot\top)$	lower $\subseteq$ restricted to coreflexives
domain	*dom*	$(\top\cdot)$	lower $\subseteq$ restricted to coreflexives
implication	$(R\cap\ )$	$(R \Rightarrow\ )$	Note that $(R\Rightarrow) = (\neg R \cup\ )$
difference	$(\_ - R)$	$(R \cup\ )$	
meet	Δ	$\cap$	$\leq$ is $(\subseteq \times \subseteq)$
join	$\cup$	Δ	$\sqsubseteq$ is $(\subseteq \times \subseteq)$
definition	$f\ X = \bigcap\{Y \mid X \subseteq gY\}$	$g\ Y = \bigcup\{X \mid f\ X \subseteq Y\}$	
distributive property	$f(X \cup Y) = (f\ X) \cup (f\ Y)$	$g(X \cap Y) = (g\ X) \cap (g\ Y)$	