

Métodos de Programação I

2.º Ano da LMCC (701055) + LESI (531316)
Ano Lectivo de 1998/99

Exame (2.ª chamada) — 9 de Fevereiro 1999
14h30
Salas 2201 a 2206

PROVA SEM CONSULTA (3 horas)

Questão 1 Para representar expressões aritméticas com variáveis, pode usar-se o seguinte tipo:

$\text{Exp} ::= \text{Var} \mid \text{Exp} \text{ Op } \text{Exp} \mid \text{Exp} \text{ Op } \text{Exp} \mid \text{Exp} \text{ Op } \text{Exp} \mid \text{Exp} \text{ Op } \text{Exp}$

Relembre a definição

$\text{Exp} ::= \text{Var} \mid \text{Exp} \text{ Op } \text{Exp} \mid \text{Exp} \text{ Op } \text{Exp} \mid \text{Exp} \text{ Op } \text{Exp}$

e determine tipos N e N' tais que Exp e N seja isomorfo a Exp . Defina em HASKELL os isomorfismos entre esses dois tipos de dados.

Questão 2 Na sequência da Questão 1, responda às seguintes alíneas:

- Defina como um catamorfismo em Exp a função $\{ \text{Exp} \rightarrow \text{List} \text{ Var} \}$ que calcula a lista das variáveis que ocorrem numa expressão. Qual o valor de $\{ \text{Exp} \rightarrow \text{List} \text{ Var} \}$ para Exp ?
- A função $\text{b} :: \text{Exp} \rightarrow \text{Exp}$ tem como objectivo substituir todas as ocorrências de uma variável de uma expressão por uma outra expressão. Por exemplo

$\text{b} :: \text{Exp} \rightarrow \text{Exp}$ $\{ \text{Exp} \rightarrow \text{List} \text{ Var} \}$ $\{ \text{Exp} \rightarrow \text{List} \text{ Var} \}$

deve dar como resultado a expressão

$\{ \text{Exp} \rightarrow \text{List} \text{ Var} \}$ $\{ \text{Exp} \rightarrow \text{List} \text{ Var} \}$ $\{ \text{Exp} \rightarrow \text{List} \text{ Var} \}$

isto é (na notação habitual): substituindo por $3 + 4$ a variável x que ocorre em $x - y$, obtém-se a expressão $(3 + 4) - y$.

Defina como um catamorfismo sobre Exp a função $\text{b} :: \text{Exp} \rightarrow \text{Exp}$.

Questão 3 Por analogia com $\text{swap} = \langle \pi_2, \pi_1 \rangle$, mostre que $[\text{id}_2, \text{id}_1]$ é a sua própria inversa. Qual o isomorfismo que esta função estabelece?

Questão 4 Relembre $A \times (B \times C) \xrightarrow{\text{assoc}} (A \times B) \times C$ e escreva a sua dual, isto é, a bijecção que estabelece o isomorfismo

$$A + (B + C) \cong (A + B) + C \tag{1}$$

da esquerda para a direita. Codifique essa função em HASKELL.

Questão 5 Relembre as definições seguintes:

$\text{ã} \backslash \text{á} \text{ N} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{ K} \text{ Ó} \uparrow * \backslash] \bullet \text{ S} \sim \text{ã} \text{ã} \text{Ç} \acute{\text{á}} \text{Ê} \text{ Ç} \text{N} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{Ê} \text{ N} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{DD}$
 $\text{ã} \text{á} \backslash \text{á} \text{ Q} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{ K} \text{ Q} \text{ã} \acute{\text{á}} \text{ á} \bullet \text{ U} * \rightarrow \backslash \text{ Ç} \text{Q} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{Ê} \text{ Q} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{D}$

Enquanto que na primeira há informação apenas em nodos intermédios (nas folhas encontram-se apenas $\text{Ó} \uparrow * \backslash]$'s), na segunda a informação encontra-se só nas folhas. Considere agora uma outra variante de árvores binárias — *shape trees* — em que se guarda apenas a forma de uma árvore. O tipo $\text{U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$ das *shape trees* pode ser definido como:

$\text{ã} \text{á} \backslash \text{á} \text{ U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ K} \text{ Ü} \bullet \text{ S} \text{ U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$

Defina em HASKELL as usuais funções \leftrightarrow^{\wedge} , $\sim | \backslash$, $\text{ã} \text{ã} \acute{\text{á}}$, $\acute{\text{á}} \text{á}$, $\acute{\text{á}} \backslash \text{á}$ e $\acute{\text{á}}] \rightarrow \sim$ para o tipo $\text{U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$. (Desenhe os correspondentes diagramas se isso o ajudar.)

Questão 6 Na sequência da Questão 5, defina como anamorfismos em $\text{U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$ as funções

1. $\text{b} \acute{\text{á}} \text{á} * \text{ã} \text{N} \text{ í} \text{í} \text{ N} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{ Ê} \text{L} \text{ U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$

2. $\text{b} \acute{\text{á}} \text{á} * \text{ã} \text{Q} \text{ í} \text{í} \text{ Q} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{ Ê} \text{L} \text{ U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$

que devolvem a forma das árvores em causa. Por exemplo, a forma da $\text{N} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$

$\text{S} \sim \text{ã} \text{ã} \text{ Ç} \text{G} \text{Ê} \text{Ç} \text{Ó} \uparrow * \backslash] \text{Ê} \text{S} \sim \text{ã} \text{ã} \text{ Ç} \text{H} \text{Ê} \text{Ç} \text{S} \sim \text{ã} \text{ã} \text{ Ç} \text{I} \text{Ê} \text{Ç} \text{Ó} \uparrow * \backslash] \text{Ê} \text{Ó} \uparrow * \backslash] \text{D} \text{D} \text{Ê} \text{Ó} \uparrow * \backslash] \text{D} \text{D} \text{D} \text{D}$

e da $\text{Q} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$

$\text{U} * \rightarrow \backslash \text{ Ç} \text{Q} \text{ã} \acute{\text{á}} \text{ã} \text{ ô} \acute{\text{á}} \text{ô} \text{Ê} \text{U} * \rightarrow \backslash \text{ Ç} \text{U} * \rightarrow \backslash \text{ Ç} \text{Q} \text{ã} \acute{\text{á}} \text{ã} \text{ ô} \acute{\text{á}} \text{ô} \text{Ê} \text{Q} \text{ã} \acute{\text{á}} \text{ã} \text{ ô} \acute{\text{á}} \text{ô} \text{D} \text{Ê} \text{Q} \text{ã} \acute{\text{á}} \text{ã} \text{ ô} \acute{\text{á}} \text{ô} \text{D} \text{D}$

é a $\text{U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$

$\text{S} \text{ Ü} \text{ Ç} \text{S} \text{ Ç} \text{S} \text{ Ü} \text{ Ü} \text{D} \text{ Ü} \text{D}$

Questão 7 Na sequência da Questão 5, responda às seguintes alíneas:

1. Defina como um catamorfismo de $\text{N} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã}$ a função $\text{b} \text{ã} * \acute{\text{á}} \acute{\text{á}} \text{á} \text{ í} \text{í} \text{ N} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ á} \text{ Ê} \text{L} \text{ Ç} \text{U} \acute{\text{U}} \text{ã} \text{ã} \text{ã} \text{Ê} \text{ Y} \acute{\text{á}} \text{Y} \text{D}$ que, dada uma árvore binária de procura, devolve um par $\text{Ç} \backslash \text{Ê} \acute{\text{D}}$ em que \backslash é a forma da árvore e $\acute{\text{D}}$ é a lista ordenada dos nodos da árvore.

2. Considere a seguinte definição:

$\text{à} \text{ K} \text{ 'á} \backslash \acute{\text{á}} \text{ô} \text{U} \acute{\text{ã}} \text{ã} \text{ Ç} \text{ã} \leftrightarrow \acute{\text{á}} \text{ã} \text{ã} \{ \text{^} \text{D}$
 $\text{ } \} \acute{\text{á}} \text{ã} \text{ã} \text{ } \{ [\text{K} \text{ Ç} \text{Ó} \uparrow * \backslash] \text{Ê} \text{Q} \text{ã} \acute{\text{á}} [\text{D}$
 $\text{ } \text{^} \text{Ç} \text{ã} \text{Ê} \text{Ç} \acute{\text{á}} \text{Ê} \text{ã} \text{D} \text{Ê} \text{Ç} [\text{Ê}] \text{D} \text{D} \text{D} \text{K} \text{ Ç} \text{S} \sim \text{ã} \text{ã} \text{ Ç} \text{ã} \text{Ê} \text{Ç} \acute{\text{á}} \text{Ê} [\text{D} \text{D} \text{Ê} \text{U} * \rightarrow \backslash \text{ Ç} \text{ã} \text{Ê}] \text{D} \text{D}$

(a) Qual o tipo de à ?

(b) Qual o resultado de $\text{à} \text{ Ç} \text{O} \sim \uparrow * \text{ Ç} \text{G} \text{Ê} \text{Ç} \text{O} \sim \uparrow * \text{ Ç} \text{G} \text{Ê} \text{Ç} \text{Ü} \leftrightarrow \backslash \text{ ô} \acute{\text{á}} \text{ô} \text{Ê} \text{Ü} \text{^} \leftrightarrow \backslash \text{ ô} \acute{\text{á}} \text{ô} \text{D} \text{D} \text{Ê} \text{Ü} \text{^} \leftrightarrow \backslash \text{ ô} \acute{\text{á}} \text{ô} \text{D} \text{D} \text{D} \text{D}$?
O que é que, afinal, “faz” f ?

Questão 8 Uma *árvore de pedigree* (Pa) descreve um animal (a) — por exemplo, um canídeo — e indica quais os seus ascendentes conhecidos (o pai e/ou a mãe), o seu pedigree, e assim sucessivamente:

$$\text{Pa} \cong a \times (1 + \text{Pa}) \times (1 + \text{Pa})$$

Codifique o tipo Pa em HASKELL.

Questão 9 A seguinte versão linear do algoritmo de Fibonacci,

$a \rightarrow b \iff K \rightarrow b \iff a \rightarrow D$

$a \in K \iff \text{Cat} \rightarrow D$

$a \in \text{Cat} \rightarrow K \iff \text{Cat} \rightarrow K \rightarrow a \iff$
 $\iff \text{Cat} \rightarrow a \rightarrow D$

é uma codificação em HASKELL cuja função auxiliar f resultou do diagrama que se segue:

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xleftarrow{[0, succ]} & 1 + N \\
 f \downarrow & & \downarrow id+f \\
 N \times N & \xleftarrow{g} & 1 + N \times N
 \end{array} \tag{2}$$

Caracterize o “gene” g do catamorfismo em causa.

Questão 10 Porque é que $a \rightarrow b \iff \text{Cat} \rightarrow a \rightarrow b$ não funciona como realização em HASKELL da seta i no diagrama que se segue?

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \xrightarrow{i_1} & 1 + a \times Y \tilde{a} \\
 & \searrow & \downarrow i \\
 & \square & Y \tilde{a} \\
 & & \swarrow \dots \\
 & & a \times Y \tilde{a}
 \end{array}$$

Justifique a sua resposta.