Métodos Formais de Programação II

4.º Ano da LMCC (7008N2)
Ano Lectivo de 1999/2000

Exame (2.ª chamada) — 8 de Julho 2000
9h30
Salas 1201 e 1209

NB: *Esta prova consta de **10** alíneas que valem, cada uma, 2 valores. Para sua consulta, encontra anexa a esta prova a listagem das principais leis de cálculo estudadas na disciplina.*

PROVA SEM CONSULTA $(3\ horas)$

Questão 1 Considere a seguinte função:

$$\mathsf{U}_S\, f \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad \dagger \cdot \langle id, (A \rightharpoonup f) \cdot |_S \rangle \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] & A \rightharpoonup B \arrow[d, "\mathsf{U}_S\, f"] \\ B & A \rightharpoonup B \end{tikzcd}$$

1. Reescreva $\mathsf{U}_S\, f$ em notação *pointwise*.
2. Prove ou refute a seguinte propriedade de U_S:

$$\mathsf{U}_\emptyset\, f \quad = \quad id \tag{2}$$

Questão 2 Se, na lei de refinamento (41), se fizer $D = 1$ obtém-se, ao fim de algumas transformações, a lei (42).

1. Que isomorfismos foram usados para deduzir (42) a partir de (41)?
2. Indique, justificando, qual dos seguintes invariantes de refinamento é induzido pelo cálculo de (42):

$$\supseteq \cdot (id \times \mathcal{P}\pi_1 \cdot dom) \tag{3}$$
$$=_\emptyset \cdot \cap \cdot (id \times \mathcal{P}\pi_1 \cdot dom) \tag{4}$$

3. Indique as funções de representação associadas a cada um dos invariantes da alínea anterior.

Questão 3 Considere:

$$\begin{tikzcd} A \rightharpoonup D \times (B \rightharpoonup C) & \leq & (A \rightharpoonup D) \times ((A \times B) \rightharpoonup C) \arrow[ll, bend left=10, "f_1"] \arrow[ll, bend left=25, "f_2"] \end{tikzcd} \tag{5}$$

sendo

$$f1 \quad = \quad \bowtie \cdot \langle \pi_1, \dagger \cdot ((A \rightharpoonup \underline{\Big(\quad\Big)}) \times pcurry) \rangle \tag{6}$$
$$f_2 \quad = \quad \bowtie \cdot (id \times pcurry) \tag{7}$$

Tomando

```
t <- < ["bi0101" -> "Manuel",
        "bi0102" -> "Pedro",
        "bi0103" -> "Antonio" ],
       [ <"bi0101","nc0101"> -> "Manuel",
         <"bi0103","nc0103"> -> "Antonio",
          "bi0104","nc0104"> -> "Maria" ] >;
```

1. Aplique as funções f_1 e f_2 a `t`.
2. Explique, por palavras suas, a diferença entre os resultados obtidos anteriormente.

Questão 4 A seguinte lei de refinamento caracteriza a vulgar representação de sequências de elementos de A através de uma indexação dos seus elementos:

$$\begin{tikzcd} A^\star \arrow[r, bend left, "r"] \arrow[r, phantom, "\leq"] & I\!N \rightharpoonup A \arrow[l, bend left, "f"] \end{tikzcd} \tag{8}$$

1. Especifique a função de abstracção f associada a (8).
2. Que restrição deverá impor a $I\!N \rightharpoonup A$ para que possa ser estabelecido um isomorfismo entre as duas estruturas de dados?

Questão 5 A seguinte função

```
FUNC txtFlat(l:txt):STR-seq
;
; txtFlat(l) flattens l while converting integers and symbols to strings.
;
RETURN CONC(< if is-STR(x) then < x >
              else if is-INT(x) then < itoa(x) >
              else if is-SYM(x) then < symstr(x) >
              else txtFlat(x) | x <- l >);
```

faz parte de uma biblioteca CAMILA que é parte integrante do material pedagógico desta disciplina. Identifique a estrutura indutiva do tipo `txt` e o método de indução que lhe está associado.

Anexo

COMPOSIÇÃO

Natural-id $$f \cdot id = id \cdot f = f \tag{9}$$

Associatividade $$(f \cdot g) \cdot h \quad = \quad f \cdot (g \cdot h) \tag{10}$$

PRODUTO

Universal-$\times$ $$k = \langle f, g \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{array} \right. \tag{11}$$

Cancelamento-$\times$ $$\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \quad , \quad \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g \tag{12}$$

Reflexão-$\times$ $$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \quad = \quad id_{A \times B} \tag{13}$$

Fusão-$\times$ $$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle \tag{14}$$

Absorção-$\times$ $$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle \tag{15}$$

Functor-$\times$ $$(g \cdot h) \times (i \cdot j) \quad = \quad (g \times i) \cdot (h \times j) \tag{16}$$

Functor-id-$\times$ $$id_A \times id_B \quad = \quad id_{A \times B} \tag{17}$$

Coproduto

Universal-$+$
$$k = [f,g] \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{array} \right. \tag{18}$$

Cancelamento-$+$
$$[g,h] \cdot i_1 = g \quad , \quad [g,h] \cdot i_2 = h \tag{19}$$

Reflexão-$+$
$$[i_1, i_2] \quad = \quad id_{A+B} \tag{20}$$

Fusão-$+$
$$f \cdot [g,h] = [f \cdot g, f \cdot h] \tag{21}$$

Absorção-$+$
$$[g,h] \cdot (i+j) = [g \cdot i, h \cdot j] \tag{22}$$

Functor-$+$
$$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g+i) \cdot (h+j) \tag{23}$$

Functor-id-$+$
$$id_A + id_B = id_{A+B} \tag{24}$$

Exponenciação

Universal
$$k = \overline{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = ap \cdot (k \times id) \tag{25}$$

Cancelamento
$$f = ap \cdot (\overline{f} \times id) \tag{26}$$

Reflexão
$$\overline{ap} = id_{B^A} \tag{27}$$

Fusão
$$\overline{g \cdot (f \times id)} = \overline{g} \cdot f \tag{28}$$

Absorção
$$f^A \cdot \overline{g} = \overline{f \cdot g} \tag{29}$$

Functor
$$(g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A \tag{30}$$

Functor-id
$$id^A = id \tag{31}$$

Indução

Universal-cata
$$k = (\!|\alpha|\!) \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot in = \alpha \cdot (\mathsf{F}\, k) \tag{32}$$

Cancelamento-cata
$$(\!|\alpha|\!) \cdot in = \alpha \cdot \mathsf{F}\,(\!|\alpha|\!) \tag{33}$$

Reflexão-cata
$$(\!|in|\!) = id_{\mathsf{T}} \tag{34}$$

Fusão-cata
$$f \cdot (\!|\alpha|\!) = (\!|\beta|\!) \quad \text{if} \quad f \cdot \alpha = \beta \cdot (\mathsf{F}\, f) \tag{35}$$

Misc.

Lei da troca
$$[\langle f,g \rangle, \langle h,k \rangle] \quad = \quad \langle [f,h], [g,k] \rangle \tag{36}$$

Lei de “banana-split”
$$\langle (\!|i|\!), (\!|j|\!) \rangle = (\!|(i \times j) \cdot \langle \mathsf{F}\,\pi_1, \mathsf{F}\,\pi_2 \rangle|\!) \tag{37}$$

Isomorfismos básicos

$$A \rightharpoonup B \quad \cong \quad (B+1)^A \tag{38}$$
$$\mathcal{P}A \quad \cong \quad A \rightharpoonup 1 \tag{39}$$

Leis de refinamento formal de dados

$$A \rightharpoonup (B \times C) \quad \leq \quad (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C) \tag{40}$$
$$A \rightharpoonup D \times (B \rightharpoonup C) \quad \leq \quad (A \rightharpoonup D) \times ((A \times B) \rightharpoonup C) \tag{41}$$
$$A \rightharpoonup (B \rightharpoonup C) \quad \leq \quad \mathcal{P}A \times ((A \times B) \rightharpoonup C) \tag{42}$$

$$\mathsf{U} \cong \mathsf{G}\,\mathsf{U} \wedge \mathsf{T} \cong \mathsf{F}\,\mathsf{T} \wedge \begin{tikzcd} \mathsf{F}\,X \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, phantom, "\leq"] & \mathsf{G}\,X \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathsf{T} \arrow[r, bend left, "r = (\!|in_{\mathsf{U}} \cdot s|\!)_{\mathsf{F}}"] \arrow[r, phantom, "\leq"] & \mathsf{U} \arrow[l, bend left, "f = (\!|in_{\mathsf{T}} \cdot g|\!)_{\mathsf{G}}"] \end{tikzcd} \tag{43}$$