Métodos Formais de Programação II

4.º Ano da LMCC (7008N2)
Ano Lectivo de 1999/2000

Exame (1.ª chamada) — 14 de Junho de 2000
14h30
Sala 2309

NB: *Esta prova consta de **10** alíneas que valem, cada uma, 2 valores. Para sua consulta, encontra anexa a esta prova a listagem das principais leis de cálculo estudadas na disciplina.*

PROVA SEM CONSULTA $(3\ horas)$

Questão 1 Identifique que operadores sobre conjuntos/funções parciais finitas são especificados pelos seguintes morfismos de conjuntos (justifique expandindo cada morfismo para notação funcional recursiva, com variáveis, e indicando o tipo da função):

$$\{\!|\,[\underline{0}, succ \cdot \pi_2]\,|\!\} \tag{1}$$

$$\{\!|\, ins \cdot (id + \pi_2 \times id) \,|\!\} \tag{2}$$

$$\cup \cdot \langle (\backslash) \cdot (id \times dom), \pi_2 \rangle \tag{3}$$

Questão 2 Considere a lei de refinamento formal de dados da qual só se indica a função de representação r:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[rr, bend left, "r = \langle \pi_1{}^{\star}, \pi_2{}^{\star} \rangle"] \arrow[rr, phantom, "\leq"] & & \cdots \arrow[ll, bend left, "f"] \end{tikzcd} \tag{4}$$

1. Preencha as reticências do diagrama da forma mais geral (polimórfica) possível.
2. Especifique a função de abstracção f em notação CAMILA.
3. Aplique a (4) a lei de "banana-split", convertendo o resultado para notação CAMILA. Qual a vantagem (em termos de eficiência) da função que obteve quando comparada com (4)? Justifique informalmente.

Questão 3 Os dois quadros que seguem representam as pautas de uma turma em duas disciplinas,

ALUNO	DISCIPLINA A
Manuela	12 (doze)
Paula	10 (dez)
Rui	16 (dezasseis)
Pedro	12 (doze)

ALUNO	DISCIPLINA B
Manuela	11 (onze)
Rodrigo	11 (onze)
Pedro	17 (dezassete)
Teresa	13 (doze)

(5)

1. Aplique ao par de estruturas de dados (5) a função de abstracção associada à lei (38). Será que esse par satisfaz o invariante concreto associado à mesma lei?
2. Com base na alínea anterior mostre que essa função não é injectiva.

3. Especifique a função

$$A \rightharpoonup ((B+1) \times (C+1)) \xleftarrow{ojoin} (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C) \tag{6}$$

($ojoin$ ='outer join') que, do mesmo par (5) deve poder calcular a informação do quadro seguinte, indicando quem fez só uma disciplina e qual:

ALUNO	DISCIPLINA A	DISCIPLINA B
Teresa	-	13 (treze)
Rui	16 (dezasseis)	-
Rodrigo	-	11 (onze)
Paula	10 (dez)	-

Questão 4 Considere a seguinte definição de um tipo de dados em CAMILA

```
TYPE

T   =   Sol | Fam;              /* Sol = solteiro, Fam = Família */
Sol :: I: A;
Pro :: P: A M: A;               /* Pro = progenitores */
Fam :: P: Pro F: T-set;         /* P = casal de progenitores, F = filhos */

ENDTYPE
```

capaz de registar descendências genealógicas.

1. Determine o functor F que caracteriza o padrão de recursividade do tipo T e as respectivas álgebras e co-álgebras in e out.
2. Defina a operação que calcula o conjunto total de As presentes num dado $t \in \mathsf{T}$.
3. Defina o método de indução associado ao tipo T.

Anexo

COMPOSIÇÃO

Natural-id	$f \cdot id = id \cdot f = f$	(7)
Associatividade	$(f \cdot g) \cdot h \quad = \quad f \cdot (g \cdot h)$	(8)

PRODUTO

Universal-$\times$	$k = \langle f, g \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$	(9)
Cancelamento-$\times$	$\pi_1 \cdot \langle f, g \rangle = f \quad , \quad \pi_2 \cdot \langle f, g \rangle = g$	(10)
Reflexão-$\times$	$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \quad = \quad id_{A \times B}$	(11)
Fusão-$\times$	$\langle g, h \rangle \cdot f = \langle g \cdot f, h \cdot f \rangle$	(12)
Absorção-$\times$	$(i \times j) \cdot \langle g, h \rangle = \langle i \cdot g, j \cdot h \rangle$	(13)
Functor-$\times$	$(g \cdot h) \times (i \cdot j) \quad = \quad (g \times i) \cdot (h \times j)$	(14)
Functor-id-$\times$	$id_A \times id_B \quad = \quad id_{A \times B}$	(15)

COPRODUTO

Universal-$+$	$k = [f,g] \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{array} \right.$	(16)
Cancelamento-$+$	$[g,h] \cdot i_1 = g \quad , \quad [g,h] \cdot i_2 = h$	(17)
Reflexão-$+$	$[i_1, i_2] \quad = \quad id_{A+B}$	(18)
Fusão-$+$	$f \cdot [g,h] = [f \cdot g, f \cdot h]$	(19)
Absorção-$+$	$[g,h] \cdot (i+j) = [g \cdot i, h \cdot j]$	(20)
Functor-$+$	$(g \cdot h) + (i \cdot j) = (g+i) \cdot (h+j)$	(21)
Functor-id-$+$	$id_A + id_B = id_{A+B}$	(22)

EXPONENCIAÇÃO

Universal	$k = \overline{f} \quad \Leftrightarrow \quad f = ap \cdot (k \times id)$	(23)
Cancelamento	$f = ap \cdot (\overline{f} \times id)$	(24)
Reflexão	$\overline{ap} = id_{B^A}$	(25)
Fusão	$\overline{g \cdot (f \times id)} = \overline{g} \cdot f$	(26)
Absorção	$f^A \cdot \overline{g} = \overline{f \cdot g}$	(27)
Functor	$(g \cdot h)^A = g^A \cdot h^A$	(28)
Functor-id	$id^A = id$	(29)

INDUÇÃO

Universal-cata	$k = (\!|\alpha|\!) \quad \Leftrightarrow \quad k \cdot in = \alpha \cdot (\mathsf{F}\, k)$	(30)
Cancelamento-cata	$(\!|\alpha|\!) \cdot in = \alpha \cdot \mathsf{F}\, (\!|\alpha|\!)$	(31)
Reflexão-cata	$(\!|in|\!) = id_{\mathsf{T}}$	(32)
Fusão-cata	$f \cdot (\!|\alpha|\!) = (\!|\beta|\!) \quad \text{if} \quad f \cdot \alpha = \beta \cdot (\mathsf{F}\, f)$	(33)

MISC.

Lei da troca	$[\langle f,g \rangle, \langle h,k \rangle] \quad = \quad \langle [f,h], [g,k] \rangle$	(34)
Lei de “banana-split”	$\langle (\!|i|\!), (\!|j|\!) \rangle = (\!|(i \times j) \cdot \langle \mathsf{F}\, \pi_1, \mathsf{F}\, \pi_2 \rangle|\!)$	(35)

ISOMORFISMOS BÁSICOS

$$A \rightharpoonup B \quad \cong \quad (B+1)^A \tag{36}$$

$$\mathcal{P} A \quad \cong \quad A \rightharpoonup 1 \tag{37}$$

LEIS DE REFINAMENTO FORMAL DE DADOS

$$A \rightharpoonup (B \times C) \quad \leq \quad (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C) \tag{38}$$

$$A \rightharpoonup D \times (B \rightharpoonup C) \quad \leq \quad (A \rightharpoonup D) \times ((A \times B) \rightharpoonup C) \tag{39}$$

$$A \rightharpoonup (B \rightharpoonup C) \quad \leq \quad \mathcal{P} A \times ((A \times B) \rightharpoonup C) \tag{40}$$

$$\mathsf{U} \cong \mathsf{G}\,\mathsf{U} \wedge \mathsf{T} \cong \mathsf{F}\,\mathsf{T} \wedge \begin{tikzcd} \mathsf{F}\, X \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, phantom, "\leq"] & \mathsf{G}\, X \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} \mathsf{T} \arrow[r, bend left, "r = (\!|in_{\mathsf{U}} \cdot s|\!)_{\mathsf{F}}"] \arrow[r, phantom, "\leq"] & \mathsf{U} \arrow[l, bend left, "f = (\!|in_{\mathsf{T}} \cdot g|\!)_{\mathsf{G}}"] \end{tikzcd} \tag{41}$$