Métodos Formais de Programação II +
Opção II — Métodos Formais de Programação II +
Especificação e Semântica

4.º Ano da LMCC (7008N2) + LESI (5308P3) + LMCC (7007A4)
Ano Lectivo de 1996/97

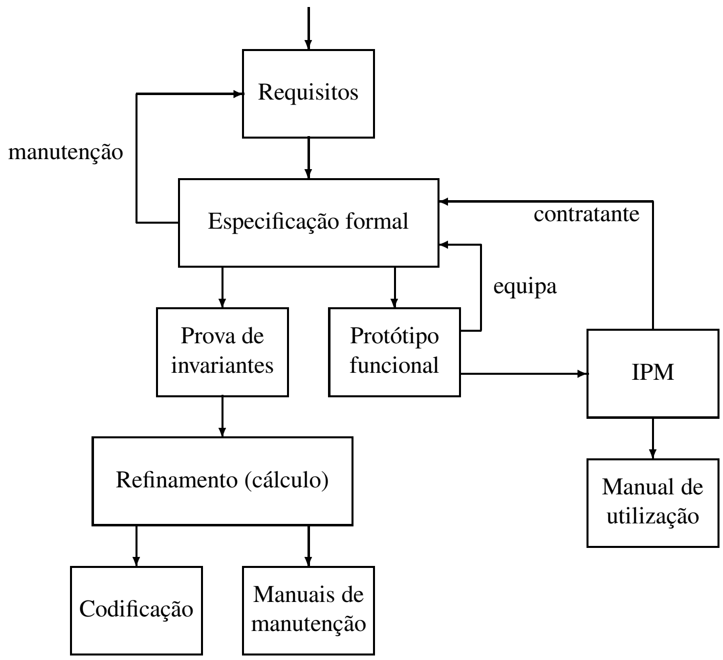
Exame (2.ª chamada) — 21 de Julho 1997
14h30
Salas 2206, 2207 e 2208

Importante:
Os alunos que pretendem ser avaliados à disciplina Métodos Formais de Programação II *(7008N2) ou* Opção II — Métodos Formais de Programação II *(5308P3) devem resolver as questões 1, 3, 9, 10, 11, 12 e 13.*
Os alunos que pretendem ser avaliados à disciplina Especificação e Semântica *(7007A4) devem resolver as questões 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.*

NB*: sempre que os seus cálculos utilizarem resultados, leis, teoremas* etc. *disponíveis no material pedagógico desta disciplina não os copie para a sua folha de exame — limite-se a citar a sua referência (*e.g. *lei (2.102), exercício 2.15,* etc.*).*

PROVA COM CONSULTA (3 $horas$)

Questão 1 Pretendendo detalhar o diagrama de blocos que representa o "ciclo de vida" de uma aplicação seguindo o método CAMILA/SETS,



a pessoa A acrescentou uma seta etiquetada *equipa* com origem no bloco *Refinamento* e destino no bloco *Prova de invariantes* e a pessoa B acrescentou uma seta com a mesma etiqueta mas com origem no bloco *Prova de invariantes* e destino no bloco *Especificação formal*.

Mostre, justificando adequada mas sucintamente, que só uma destas setas faz de facto sentido.

Questão 2 Mostre que a relação de coerência entre duas funções parciais finitas f e g se pode definir por

$$f \Delta g \stackrel{\text{def}}{=} f \mid dom(g) = g \mid dom(f)$$

Será Δ uma relação reflexiva e antissimétrica? Justifique.

Questão 3 Relativamente aos diagramas funcionais em SETS que se seguem,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}(A) \arrow[r, "dom"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"'] \\ B & \mathcal{F}(B) \arrow[r, "dom"] & \mathcal{G}(B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & C \hookrightarrow A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "C \hookrightarrow f"'] & 2^A \arrow[d, "2^f"'] \\ B & C \hookrightarrow B \arrow[r, "x"] & 2^B \end{tikzcd}$$

identifique as estruturas $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, bem como o operador x, por forma a estes diagramas ilustrarem duas propriedades válidas da notação SETS. Justifique adequadamente a sua resposta.

Questão 4 Mostre que, em $\mathbb{N}$, a ordem $x \preceq y$ definida por

$$x < y \textit{ e } x \textit{ é divisor inteiro de } y$$

é bem-fundada, e caracterize o respectivo método de indução estrutural.

Questão 5 Considere a seguinte função genérica

$$\begin{array}{rcl} listByIndex & : & A^\star \times (A \hookrightarrow B) \longrightarrow (A \times B)^\star \\ listByIndex(l, \sigma) & \stackrel{\text{def}}{=} & <\langle a, \sigma(a)\rangle \mid a \leftarrow l \wedge a \in dom(\sigma)> \end{array}$$

que encara a sequência que lhe é passada como primeiro argumento como índice para listar a função finita que é o seu outro argumento.

1. Qual é o comportamento desta função para $dom(\sigma) \subset elems(l)$? Será que a função cumpre o seu objectivo de listar σ indexada por l? Justifique.
2. Mostre que $listByIndex$ <u>não</u> é uma função sobrejectiva.

Questão 6 Seja $\prec$ uma ordem total sobre um domínio de dados A. Uma sequência l em $A^\star$ dir-se-á $\prec$-crescente sse a seguinte condição se verificar:

$$increasing(l) \stackrel{\text{def}}{=} \forall i, j \leq length(l) : i < j \Rightarrow l(i) \prec l(j)$$

Especifique uma função de inserção em $A^\star$

$$insert \quad : \quad A \times A^\star \longrightarrow A^\star$$

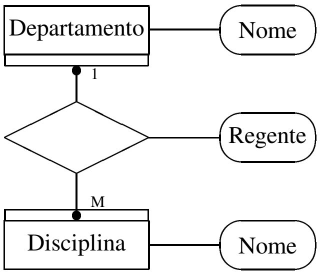
que preserve $increasing$ como propriedade invariante, provando essa preservação por indução em $A^\star$.

Questão 7 Será que, numa especificação equacional, "tirar axiomas implica sempre diminuir a semântica equacional correspondente"? Quer dizer, sendo (Σ, X, E) e (Σ, X, E') duas especificações sobre a mesma assinatura $\Sigma : \Omega \rightarrow S^\star \times S$, demonstre ou refute o facto seguinte,

$$E \subset E' \Rightarrow \cong_E \subset \cong_{E'}$$

onde " $\subset$ " designa a inclusão (estrita) de famílias S-indexadas de conjuntos.

Questão 8 Considere um modelo cujo estado interno Q corresponde à semântica em SETS do diagrama ERA seguinte:



1. Especifique formalmente o evento $NDISC$ sobre Q que regista uma nova disciplina, conhecidos o seu nome, regente e departamento.
2. Prove que a sua especificação de $NDISC$ satisfaz o invariante implícito em Q.

Questão 9 Será que o seguinte facto

$$A^\star \times (A \hookrightarrow B) \trianglelefteq_f^\phi (A \times B)^\star$$

se verifica em SETS? Na afirmativa proponha f e ϕ. Na negativa, apresente um contra-exemplo.

Questão 10 Do trabalho laboratorial desta disciplina consta o seguinte modelo de dados,

$ActPlan$	$\cong$	$\#Act \hookrightarrow Description \times Span \times Resources \times Dependences$	
$Description$	$\cong$	STR	*/*descrição da actividade */*
$Span$	$\cong$	$\mathbb{N}$	*/*duração da actividade */*
$Resources$	$\cong$	$\#Res \hookrightarrow \mathbb{N}$	*/* tipo e quantidade de recursos necessários para realizar uma actividade */*
$Dependences$	$\cong$	$2^{\#Act}$	*/*actividades precedentes */*

do qual se pode deduzir a seguinte implementação relacional,

$$ActPlan_6 \quad = \quad 2^{\#Act \times Description \times Span} \times 2^{\#Act \times \#Res \times \mathbb{N}} \times 2^{\#Act \times \#Act}$$

calculada após os 6 passos de refinamento que se seguem:

$$\begin{array}{lll}
\cong_1 & \left\{ f_1 = \#Act \hookrightarrow [\pi_1 \circ \pi_1 \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_1, dom \circ \pi_2] \right. & \textit{cf.}\ (8.64)\ \text{e}\ (8.23) \\
\trianglelefteq_2 & \left\{ \begin{array}{l} f_2 = \bowtie_n \\ \phi_2 = dpi \end{array} \right. & \textit{cf.}\ (8.72) \\
\trianglelefteq_3 & \left\{ \begin{array}{l} f_3 = \bowtie_n \times g \\ \phi_3 = dpi \times \lambda r.V \end{array} \right. & \textit{cf.}\ (8.72) \\
\cong_4 & \left\{ f_4 = [[\pi_1, \pi_2], \pi_3] \right. & \textit{cf.}\ (8.23) \\
\trianglelefteq_5 & \left\{ \begin{array}{l} f_5 = mkf \times mkf \times id \\ \phi_5 = fdp \times fdp \times \lambda r.V \end{array} \right. & \textit{cf.}\ (8.9) \\
\cong_6 & \left\{ f_6 = 2^{[\pi_1, [\pi_2, \pi_3]]} \times 2^{[[\pi_1, \pi_2], \pi_3]} \times id \right. & \textit{cf.}\ (8.23)
\end{array}$$

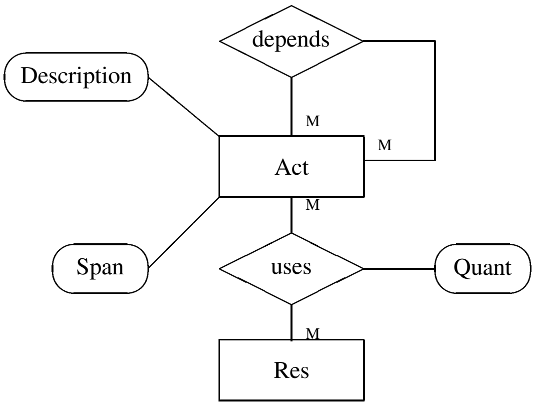
onde

$$g(r) \quad = \quad \left(\begin{array}{c} p \\ NIL \end{array} \right)_{p \in r}$$

1. Calcule a simulação de $bestStart$ sobre $ActPlan_6$, onde $bestStart$ é uma função que conhece:

$$\begin{array}{rcl} bestStart & : & \#Act \times ActPlan \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ bestStart(a, db) & \stackrel{\text{def}}{=} & let \quad D = \pi_4(db(a)) \\ & & in \quad \left\{ \begin{array}{lcl} D = \{\} & \Rightarrow & 0 \\ D \neq \{\} & \Rightarrow & \underset{aa \in D \cap dom(db)}{MAX} \quad bestStart(aa, db) + \pi_2(db(aa)) \end{array} \right. \end{array}$$

2. Suponha que um seu colega da disciplina *Desenvolvimento de Sistemas de Informação* propôs o seguinte diagrama ERA como especificação de $Actplan$:



Com base na semântica em SETS que estudou para diagramas deste tipo, compare (formalmente) o modelo implícito neste diagrama com o modelo $ActPlan$ acima proposto.

Questão 11 Do trabalho laboratorial desta disciplina consta também o seguinte modelo de dados,

$$\begin{array}{rcl} Orc & \cong & Item \hookrightarrow Info \ \ \text{/*}\mathit{Orc = \text{‘orçamento’}}\text{ */} \\ Info & \cong & Acts + Orc \\ Acts & \cong & 2^{\#Act} \ \ \text{/*}\mathit{Acts = \text{actividades envolvidas}}\text{ */} \end{array}$$

entendendo-se por orçamento uma organização hierárquica das actividades de um projecto, conducente ao cálculo de custos por categoria orçamental.

1. Suponha que alguém está a construir um ‘browser’ gráfico para estruturas de tipo Orc e precisa de ter uma representação desta estrutura em C/C++. Calcule essa representação usando SETS, e codifique-a.
2. Sendo Orc uma estrutura de dados recursiva, escreva-a sob a forma $Orc \cong \mathcal{F}(Orc)$ e caracterize a ordem $<_{\mathcal{F}}$ correspondente.
3. Calcule uma implementação relacional de Orc, citando as leis de SETS usadas em cada passo.

Questão 12 A função

$$f(n, r) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{id \times (\lambda x. x \times n)}(r)$$

implementa, a nível relacional, uma operação que conhece sobre multiconjuntos. Identifique-a e reconstitua o respectivo processo de cálculo.

Questão 13 O seguinte ciclo-`while`,

```
{   M r = u;
    Y y′ = y;
    while (¬ p(y′))
       {   r = r θ d(y′);
           y′ = e(y′);
       };
    r = r θ v;
}
```

registado na notação "pseudo-C" usada nesta disciplina, foi proposto como concretização algorítmica da seguinte função

$$
\begin{array}{rcl}
f & : & Y \longrightarrow M \\
f(y) & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & \left\{ \begin{array}{rcl} p(y) & \Rightarrow & v \\ \neg(p(y)) & \Rightarrow & d(y)\,\theta\, f(e(y)) \end{array} \right.
\end{array}
$$

onde θ é associativa e tem u como elemento neutro.

Discuta a correcção dessa concretização algorítmica, justificando formalmente.
