Métodos Formais de Programação II +
Opção II — Métodos Formais de Programação II +
Especificação e Semântica

4.º Ano da LMCC (7008N2) + LESI (5308P3) + LMCC (7007A4)
Ano Lectivo de 1996/97

Exame (1.ª chamada) — 30 de Junho 1997
14h30
Salas 2208 e 2209

Importante:
Os alunos que pretendem ser avaliados à disciplina Métodos Formais de Programação II *(7008N2) ou* Opção II — Métodos Formais de Programação II *(5308P3) devem resolver as questões 1, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13.*
Os alunos que pretendem ser avaliados à disciplina Especificação e Semântica *(7007A4) devem resolver as questões 1, 2, 3, 4, 5 e 6.*

PROVA COM CONSULTA (3 $horas$)

Questão 1 Considere o seguinte diagrama funcional, em SETS,

$$\begin{tikzcd}
B & B \times E \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & E \\
C \arrow[u, "j"] & C \times D \arrow[u, "j \times i"'] \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & D \arrow[u, "i"'] \\
& A \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "{[f,h]}"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

envolvendo as construções

$$\begin{array}{rcl} j \times i & : & C \times D \longrightarrow B \times E \\ j \times i(\langle x, y \rangle) & \stackrel{\text{def}}{=} & \langle j(x), i(y) \rangle \end{array} \tag{1}$$

e

$$\begin{array}{rcl} [f, h] & : & A \longrightarrow C \times D \\ [f, h](a) & \stackrel{\text{def}}{=} & \langle f(a), h(a) \rangle \end{array} \tag{2}$$

1. Indique 4 igualdades funcionais que possam ser inferidas deste diagrama.
2. Verifique, justificando a sua resposta, se a seguinte lei da notação functorial de SETS,

$$(j \times i) \circ [f, h] \quad = \quad [j \circ f, i \circ h] \tag{3}$$

é dedutível do mesmo diagrama.

RESOLUÇÃO:

1. Há quatro igualdades elementares no diagrama,

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 \circ (j \times i) & = & j \circ \pi_1 \\ \pi_2 \circ (j \times i) & = & i \circ \pi_2 \\ \pi_1 \circ [f, h] & = & f \\ \pi_2 \circ [f, h] & = & h \end{array}$$

fáceis de justificar, das quais, por composição, se podem obter outras, *e.g.*

$$\pi_1 \circ (j \times i) \circ [f, h] \quad = \quad j \circ f \tag{4}$$

ou

$$\pi_2 \circ (j \times i) \circ [f, h] \quad = \quad i \circ h \tag{5}$$

2. A resposta é afirmativa: aplicando a construção de funções a ambos os membros de (4) e (5) ter-se-á:

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 \circ (j \times i) \circ [f, h] & = & j \circ f \\ \pi_2 \circ (j \times i) \circ [f, h] & = & i \circ h \\ \hline [\pi_1 \circ (j \times i) \circ [f, h], \pi_2 \circ (j \times i) \circ [f, h]] & = & [j \circ f, i \circ h] \\ & \updownarrow & \\ [\pi_1, \pi_2] \circ (j \times i) \circ [f, h] & = & [j \circ f, i \circ h] \\ & \updownarrow & \\ id \circ (j \times i) \circ [f, h] & = & [j \circ f, i \circ h] \\ & \updownarrow & \\ (j \times i) \circ [f, h] & = & [j \circ f, i \circ h] \end{array}$$

(deixa-se ao leitor a tarefa de justificar cada passo do raciocínio acima).
Alternativamente, bastaria recorrer a (1) e (2):

$$\begin{array}{rcl} [(j \times i) \circ [f, h]](a) & = & (j \times i)([f, h](a)) \\ & = & (j \times i)(\langle f(a), h(a) \rangle) \\ & = & \langle j(f(a)), i(h(a)) \rangle \\ & = & \langle (j \circ f)(a), (i \circ h)(a) \rangle \\ & = & [j \circ f, i \circ h](a) \end{array}$$

como queríamos demonstrar. (Deixa-se ao leitor a tarefa de justificar cada passo do raciocínio acima).
$\square$

Questão 2 Demonstre ou refute a seguinte igualdade funcional, em SETS,

$$(A \hookrightarrow f)(\sigma) \dagger (A \hookrightarrow f)(\tau) \quad = \quad (A \hookrightarrow f)(\sigma \dagger \tau) \tag{6}$$

onde $A \hookrightarrow f$ se define por

$$(A \hookrightarrow f)(\sigma) \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad \left(\begin{array}{c} a \\ f(\sigma(a)) \end{array} \right)_{a \in dom(\sigma)}$$

RESOLUÇÃO: O facto é verdadeiro, como se demonstra a seguir.
O lado esquerdo de (6) re-escreve em

$$\begin{array}{rcl} (A \hookrightarrow f)(\sigma) \dagger (A \hookrightarrow f)(\tau) & \underset{\text{por (A.55)}}{=} & ((A \hookrightarrow f)(\sigma)) \setminus dom((A \hookrightarrow f)(\tau)) \cup (A \hookrightarrow f)(\tau) \\ & \underset{\text{por (1.57)}}{=} & ((A \hookrightarrow f)(\sigma)) \setminus dom(\tau) \cup (A \hookrightarrow f)(\tau) \\ & = & (A \hookrightarrow f)(\sigma \setminus dom(\tau)) \cup (A \hookrightarrow f)(\tau) \end{array}$$

(estude o passo injustificado).

O lado direito de (6) re-escreve em

$$
\begin{aligned}
(A \hookrightarrow f)(\sigma \dagger \tau) & \underset{\text{por (A.55)}}{=} (A \hookrightarrow f)(\sigma \setminus dom(\tau) \cup \tau) \\
& \underset{\text{por (1.60)}}{=} (A \hookrightarrow f)(\sigma \setminus dom(\tau)) \cup (A \hookrightarrow f)(\tau)
\end{aligned}
$$

Logo, os lados de (6) coincidem, como queríamos mostrar. $\square$

Questão 3 Considere o seguinte fragmento de gramática de contexto livre para expressões aritméticas:

$$
\begin{aligned}
G &= \langle NT, T, \langle \mathit{Exp} \rangle, P \rangle \\
NT &= \{ \langle \mathit{Exp} \rangle, \langle \mathit{Sinal} \rangle, \langle \mathit{Termo} \rangle, \langle \mathit{Factor} \rangle, \langle \mathit{MulOp} \rangle, \langle \mathit{AdiOp} \rangle \} \\
T &= \{ \texttt{+}\,,\ \texttt{-}\,,\ \texttt{*}\,,\ \texttt{/}\,,\ \texttt{(}\,,\ \texttt{)}\,,\ \texttt{id}\,,\ \texttt{num} \} \\
P &= \left\{ \begin{array}{rcl}
\langle \mathit{Exp} \rangle & ::= & \langle \mathit{Sinal} \rangle \langle \mathit{Termo} \rangle (\langle \mathit{AdiOp} \rangle \langle \mathit{Termo} \rangle)^* \\
\langle \mathit{Sinal} \rangle & ::= & \epsilon \mid \texttt{+} \mid \texttt{-} \\
\langle \mathit{Termo} \rangle & ::= & \langle \mathit{Factor} \rangle (\langle \mathit{MulOp} \rangle \langle \mathit{Factor} \rangle)^* \\
\langle \mathit{Factor} \rangle & ::= & \texttt{id} \mid \texttt{num} \mid \texttt{(} \langle \mathit{Exp} \rangle \texttt{)} \\
\langle \mathit{AdiOp} \rangle & ::= & \texttt{+} \mid \texttt{-} \\
\langle \mathit{MulOp} \rangle & ::= & \texttt{*} \mid \texttt{/}
\end{array} \right.
\end{aligned}
$$

1. Recorde o método que estudou para representação de uma gramática livre de contexto $G = \langle N, T, S, P \rangle$ por uma assinatura algébrica. Construa a correspondente assinatura Σ_G.
2. Recorde o método que estudou para representação de uma mesma gramática $G = \langle N, T, S, P \rangle$, expressa em BNF, num sistema de equações em SETS: (1) começa-se por eliminar todas as ocorrências de símbolos terminais nas produções em P; (2) a cada símbolo não-terminal $\langle A \rangle$ em N corresponde a variável A em SETS; (3) usa-se a seguinte tabela de conversão de BNF em SETS:

BNF		SETS
$\alpha \mid \beta$	$\mapsto$	$\alpha + \beta$
$\alpha\ \beta$	$\mapsto$	$\alpha \times \beta$
α^*	$\mapsto$	α^*
α^+	$\mapsto$	$\alpha \times \alpha^*$
ϵ	$\mapsto$	1

Recorra a este método para converter a gramática acima num sistema de equações em SETS, resolvendo-o em ordem a Exp.

RESOLUÇÃO:

1. Ver a 1.ª alínea do exercício 1.39.
2. Aplicando o método proposto, ter-se-á:

$$
\left\{ \begin{array}{rcl}
Exp & \cong & Sinal \times Termo \times (AdiOp \times Termo)^* \\
Sinal & \cong & 1 + 1 + 1 \\
Termo & \cong & Factor \times (MulOp \times Factor)^* \\
Factor & \cong & 1 + 1 + Exp \\
AdiOp & \cong & 1 + 1 \\
MulOp & \cong & 1 + 1
\end{array} \right.
$$

$\updownarrow$ por (2.46) e três substituições

$$
\left\{ \begin{array}{rcl}
Exp & \cong & 3 \times Termo \times (2 \times Termo)^* \\
Termo & \cong & Factor \times (2 \times Factor)^* \\
Factor & \cong & 2 + Exp
\end{array} \right.
$$

$\updownarrow$ por substituição de $Factor$ e (2.44)

$$
\left\{ \begin{array}{rcl}
Exp & \cong & 3 \times Termo \times (2 \times Termo)^* \\
Termo & \cong & (2 + Exp) \times (4 + 2 \times Exp))^*
\end{array} \right.
$$

$\updownarrow$ por substituição de $Termo$

$$
\left\{ \begin{array}{rcl}
Exp & \cong & 3 \times ((2 + Exp) \times (4 + 2 \times Exp))^*) \times (2 \times ((2 + Exp) \times (4 + 2 \times Exp))^*))^*
\end{array} \right.
$$

□

Questão 4 Recorde o fragmento de uma especificação de um *plano de estudos* de uma licenciatura que se segue:

$$PlanoEstudos \quad \cong \quad 2^{Disciplina}$$

onde uma disciplina ou é obrigatória ou opcional,

$$Disciplina \quad \cong \quad Obrigat + Opcional$$

sendo uma disciplina obrigatória caracterizada por uma série de atributos,

$$\begin{array}{rcllr} Obrigat & \cong & A : 5 & \times & \text{/*}\textit{ano do curso}\text{ */} \\ & & AC : ACien & \times & \text{/*}\textit{área científica}\text{ */} \\ & & N : Nome & \times & \text{/*}\textit{nome}\text{ */} \\ & & R : 3 & \times & \text{/*}\textit{regime (1.º sem., 2.º sem., anual)}\text{ */} \\ & & E : Esc & & \text{/*}\textit{escolaridade,}\text{ etc. */} \end{array}$$

e uma disciplina opcional caracterizada como se segue,

$$\begin{array}{rcllr} Opcional & \cong & A : 5 & \times & \text{/*}\textit{ano do curso}\text{ */} \\ & & Nr : \mathbb{N} & \times & \text{/*}\textit{número da opção}\text{ */} \\ & & R : 3 & \times & \text{/*}\textit{regime (1.º sem., 2.º sem., anual)}\text{ */} \\ & & E : Esc & \times & \text{/*}\textit{escolaridade,}\text{ etc. */} \\ & & O : 2^{Opcao} & & \text{/*}\textit{opções oferecidas}\text{ */} \end{array}$$

onde cada opção se caracteriza por:

$$\begin{array}{rcllr} Opcao & \cong & AC : ACien & \times & \text{/*}\textit{área científica}\text{ */} \\ & & N : Nome & & \text{/*}\textit{nome}\text{ */} \end{array}$$

Especifique um invariante sobre $PlanoEstudos$ capaz de garantir as seguintes propriedades:

1. Não há "buracos" no plano de estudos, *i.é*, se existe o ano $n > 1$ do curso, então existe também o ano $n - 1$, *etc.*
2. O número de disciplinas por semestre não pode exceder 5.

RESOLUÇÃO:

1. Não há "buracos" no plano de estudos:

$$\phi_1(p) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 : 2^{A|A}(p) = \overline{n}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} f \mid k & : & A + B \longrightarrow C \\ f \mid k(x) & \stackrel{\text{def}}{=} & \left\{ \begin{array}{lcl} x = i_1(a) & \Rightarrow & f(a) \\ x = i_2(b) & \Rightarrow & k(b) \end{array} \right. \end{array}$$

para f e k adequadamente tipadas [1].

2. O número de disciplinas por semestre não pode exceder 5:

$$\phi_2(p) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \forall i \in 5, a \in 2 : card(aux(p, i, s)) \leq 5$$

onde

$$aux(p, i, s) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \{d \in p \mid \ (A \mid A)(d) = i \wedge (R \mid R)(d) \in \{s, 3\}\}$$

(onde 3 é o regime de uma disciplina anual).

---

[1] A expressão $2^{A|A}(p)$ abrevia, pois, a expressão

$$\{ \left\{ \begin{array}{lcl} x = i_1(a) & \Rightarrow & A(a) \\ x = i_2(b) & \Rightarrow & A(b) \end{array} \right. \mid a \in p\}$$

$\square$

Questão 5 Dada a assinatura

$$\Sigma = \begin{cases} f : \rho \to \mu \\ u : \to \mu \\ b : \to \rho \\ a : \mu \times \mu \to \mu \\ d : \pi \times \rho \to \mu \\ e : \pi \times \rho \to \rho \end{cases}$$

Defina uma Σ-álgebra $\mathcal{A}$ tal que:

- $\mathcal{A}$ é modelo da interface $\langle \Sigma, E \rangle$ onde E é o conjunto dos seguintes dois Σ-axiomas:

$$f(b) \equiv u \tag{7}$$

$$f(e(z,x)) \equiv a(d(z,x), f(x)) \tag{8}$$

- A semântica de f é a da função que calcula o comprimento de uma lista finita.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á, necessariamente, $\mathcal{A}(f) = length$. Logo, $\mathcal{A}(\rho) = A^\star$ (para um dado conjunto A) e $\mathcal{A}(\mu) = \mathbb{N}_0$, reduzindo os nossos graus de liberdade a

$$\begin{cases} f : A^\star \to \mathbb{N}_0 \\ u : \to \mathbb{N}_0 \\ b : \to A^\star \\ a : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \\ d : \pi \times A^\star \to \mathbb{N}_0 \\ e : \pi \times A^\star \to A^\star \end{cases}$$

tal que

$$\begin{aligned} length(b) &\equiv u \\ length(e(z,x)) &\equiv a(d(z,x), length(x)) \end{aligned}$$

(omitem-se os $\mathcal{A}(\ldots)$ para maior legibilidade).

A constante b terá que ser uma lista de As e u o seu comprimento: $b = <>$ e $u = 0$ são uma escolha natural (mas não única, claro). O construtor e é o único em $\mathcal{A}$ para listas de As. Se escolhermos $cons$ como sua possível instanciação, para $\mathcal{A}(\pi) = A$, veremos d e a implicitamente instanciados pelo segundo axioma, pois

$$length(cons(z,x)) = 1 + length(x)$$

Ter-se-á, portanto,

$$\begin{aligned} a(y,x) &= y + x \\ d(z,x) &= 1 \end{aligned}$$

o que termina a nossa construção da álgebra que se pede. $\square$

Questão 6 Na aplicação prática da especificação formal a problemas concretos usam-se muitas vezes "regras de algibeira" para simplificar argumentos de preservação de invariantes. É esse o caso de um modelo cujo estado interno esteja sujeito a um invariante da forma

$$\text{inv-}Q \stackrel{\text{def}}{=} A \hookrightarrow \phi$$

onde $\phi : B \to 2$ é um dado predicado, e o evento a tratar é determinístico e tal que a sua pós-condição é da forma:

$$E(b') \stackrel{\text{def}}{=} \sigma' = (A \hookrightarrow f)(\sigma) \wedge b' = g(\sigma)$$

1. Tipifique, de forma mais geral possível, as funções f e g.
2. Recorra à definição formal do predicado $A \hookrightarrow \phi$ para justificar ou refutar a seguinte "regra de algibeira":

$$\text{– Para demonstrar que } E \text{ preserva inv-}Q\text{, basta provar que } f \text{ preserva } \phi. \tag{9}$$

RESOLUÇÃO:

1. Pela definição de inv-Q e ϕ ficamos a saber que $Q = A \hookrightarrow B$. Logo f será uma função de B para B e g um qualquer observador de Q. Em suma:

$$\begin{array}{rcl} f & : & B \longrightarrow B \\ g & : & (A \hookrightarrow B) \longrightarrow C \end{array}$$

2. Temos

$$(A \hookrightarrow \phi)(\sigma) \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad \forall a \in dom(\sigma) : \phi(\sigma(a))$$

recordar o Exercício 2.52.
Se f preservar ϕ, isso significa que, para todo o $b \in B$, $\phi(b) \Rightarrow \phi(f(b))$, logo, por maioria de razão,

$$\forall a \in dom(\sigma) : \phi(\sigma(a)) \Rightarrow \phi(f(\sigma(a)))$$

Daqui infere-se:

$$(\forall a \in dom(\sigma) : \phi(\sigma(a))) \quad \Rightarrow \quad (\forall a \in dom(\sigma) : \phi(f(\sigma(a))))$$

que é a mesma coisa que

$$(A \hookrightarrow \phi(\sigma)) \quad \Rightarrow \quad (A \hookrightarrow (\phi \circ f)(\sigma))$$

ou a mesma coisa que

$$\text{inv-}Q(\sigma) \quad \Rightarrow \quad \text{inv-}Q((A \hookrightarrow f)(\sigma))$$

que é exactamente o argumento da preservação de inv-Q por E, pois

$$(A \hookrightarrow (\phi \circ f)(\sigma)) \quad = \quad (A \hookrightarrow \phi)(A \hookrightarrow f(\sigma))$$

como se pode facilmente demonstrar.

$\square$

Questão 7 Será verdadeiro o seguinte facto,

$$(A \times B)^\star \quad \trianglelefteq_f^\phi \quad A^\star \times B^\star$$

em SETS, para quaisquer A e B?

Na negativa, apresente um contra-exemplo. Na afirmativa, proponha f e ϕ.

RESOLUÇÃO: O facto é verdadeiro e indica que toda a sequência de pares é representável por um par de sequências do mesmo comprimento, adequadamente tipadas. Trata-se de uma lei análoga a (8.65), podendo a sua dedução ser feita de forma semelhante:

$$\begin{array}{rcl} (A \times B)^\star & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & \bigcup_{n \geq 0} (A \times B)^n \\ & \cong & \bigcup_{n \geq 0} A^n \times B^n \\ & = & \{\langle l_1, l_2 \rangle \mid \ l_1 \in A^n \wedge l_2 \in B^n \wedge n \geq 0\} \\ & = & \{\langle l_1, l_2 \rangle \mid \ l_1 \in A^\star \wedge l_2 \in B^\star \wedge length(l_1) = length(l_2)\} \\ & = & (A^\star \times B^\star)_{\lambda(l_1, l_2).length(l_1) = length(l_2)} \end{array}$$

Logo,

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(l,r).length(l) = length(r)$$

A função de abstracção que se propõe é a adaptação de $\bowtie$ a sequências, *i.é*:

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(l,r).\begin{cases} l = <> & \Rightarrow \quad <> \\ l \neq <> & \Rightarrow \quad <\langle head(l), head(r)\rangle> \frown f(tail(l), tail(r)) \end{cases}$$

Alternativamente, pode fazer-se a dedução de f e ϕ a partir de a alínea (4) do exercício 8.2:

$$\begin{array}{lll} (A \times B)^\star & \trianglelefteq_{fr}^{inv4} & \mathbb{N} \hookrightarrow (A \times B) \\ & \trianglelefteq_{\bowtie}^{eqd} & (\mathbb{N} \hookrightarrow A) \times (\mathbb{N} \hookrightarrow B) \\ & \cong_{f_3} & A^\star \times B^\star \end{array}$$

em cuja resolução fr e $inv4$ são definidos, Sendo f_3 a inversa de fr, deixa-se como exercício a prossecução deste raciocínio.
□

Questão 8 Indique 4 leis $A \trianglelefteq_f^\phi B$ do cálculo SETS tais que a função de *abstracção* f, apesar de parcial, é injectiva. Para cada uma delas, escreva a definição da função de *representação* correspondente, *i.é*, da inversa f^{-1}.

RESOLUÇÃO: Na questão anterior temos dois desses factos, o que se aí propõe e a lei (8.65) de que se partiu. As funções de representação correspondentes são, respectivamente,

$$f^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} [\pi_1{}^\star, \pi_2{}^\star]$$

e

$$\bowtie^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} [A \hookrightarrow \pi_1, A \hookrightarrow \pi_2]$$

Outras duas leis nesta situação são (8.9) — propondo-se

$$mkf^{-1}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \{\langle a, \sigma(a)\rangle \mid a \in dom(\sigma)\}$$

— e (8.72), propondo-se

$$\bowtie_n^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} [A \hookrightarrow \pi_1, uncurry \circ (A \hookrightarrow \pi_2)]$$

onde

$$uncurry(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} \langle b, c\rangle \\ t(b)(c) \end{array}\right)_{b \in dom(t) \wedge c \in dom(t(b))}$$

□

Questão 9 Suponha que se perdeu toda a informação de um $\trianglelefteq$-raciocínio, exceptuando a função de abstracção global f, que é a seguinte:

$$f = (A \hookrightarrow [dom \circ \pi_2, \pi_1]) \circ \bowtie_n \circ (mkf \times g)$$

onde

$$g(r) = \left(\begin{array}{c} p \\ NIL \end{array}\right)_{p \in r}$$

Será possível reconstituir o processo de cálculo que se perdeu? Na afirmativa, faça-o, indicando a estrutura original, a implementação que se obteve, e as leis do cálculo SETS que foram utilizadas. Na negativa, explique a sua resposta.

RESOLUÇÃO: Deduz-se que

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$$

onde

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & A \hookrightarrow [dom \circ \pi_2, \pi_1] \\ f_2 & = & \bowtie_n \\ f_3 & = & mkf \times g \end{array}$$

Começando por f_3, mkf identifica-se como função de abstracção da lei (8.9). Quanto a g, para funcionar como função de abstracção o seu tipo terá que ser $2^X \longrightarrow (X \hookrightarrow 1)$, para um qualquer X, já que tem de ser sobrejectiva. Identifica-se aqui, pois, a lei (8.64). Assim,

$$(A \hookrightarrow B) \times (X \hookrightarrow 1) \quad \trianglelefteq_3 \quad 2^{A \times B} \times 2^X$$

Passando a f_2, $\bowtie_n$ identifica-se como função de abstracção da lei (8.72) mas, para que f_2 "encaixe" em f_3 é preciso que X seja um par $A \times Y$, para um dado Y. Ter-se-á então:

$$\begin{array}{rcl} A \hookrightarrow B \times (Y \hookrightarrow 1) & \trianglelefteq_2 & (A \hookrightarrow B) \times (A \times Y \hookrightarrow 1) \\ & \trianglelefteq_3 & 2^{A \times B} \times 2^{A \times Y} \end{array}$$

Finalmente, em f_1 apenas temos que inspeccionar $[dom \circ \pi_2, \pi_1]$, que é afinal o mesmo que $[dom \circ \pi_2, id \circ \pi_1]$, sugerindo a aplicação da lei (3):

$$[dom \circ \pi_2, id \circ \pi_1] \quad = \quad (dom \times id) \circ [\pi_2, \pi_1]$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} A \hookrightarrow [dom \circ \pi_2, id \circ \pi_1] & = & A \hookrightarrow ((dom \times id) \circ [\pi_2, \pi_1]) \\ & = & (A \hookrightarrow (dom \times id)) \circ (A \hookrightarrow [\pi_2, \pi_1]) \end{array}$$

Há, pois, dois passos de refinamento aqui: no primeiro, a $[\pi_2, \pi_1]$ associa-se a lei (8.22), recordar o exercício 8.5. No nosso contexto, teremos:

$$A \hookrightarrow (Y \hookrightarrow 1) \times B \quad \trianglelefteq_{1.2} \quad A \hookrightarrow B \times (Y \hookrightarrow 1)$$

no segundo, dom aplica $Y \hookrightarrow 1$ em 2^Y — de novo a lei (8.64), agora em sentido inverso — e id aplica B em B: No nosso contexto, teremos:

$$A \hookrightarrow 2^Y \times B \quad \trianglelefteq_{1.1} \quad A \hookrightarrow (Y \hookrightarrow 1) \times B$$

Pondo tudo junto:

$$\begin{array}{rcl} A \hookrightarrow 2^Y \times B & \cong_{1.1} & A \hookrightarrow (Y \hookrightarrow 1) \times B \\ & \cong_{1.2} & A \hookrightarrow B \times (Y \hookrightarrow 1) \\ & \trianglelefteq_2 & (A \hookrightarrow B) \times (A \times Y \hookrightarrow 1) \\ & \trianglelefteq_3 & 2^{A \times B} \times 2^{A \times Y} \end{array}$$

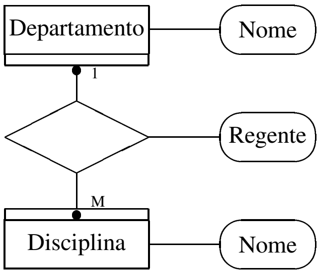
— recordar o exercício 8.15 e sua resolução — para

$\cong_{1.1}$	*cf.* (8.64)
$\cong_{1.2}$	*cf.* (8.22)
$\trianglelefteq_2$	*cf.* (8.72)
$\trianglelefteq_3$	*cf.* (8.9) e (8.64)

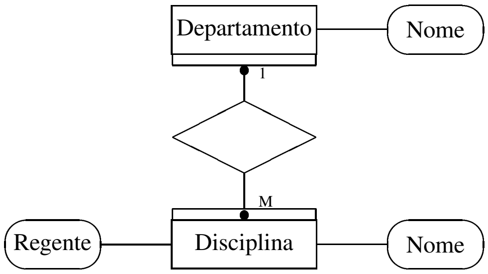
□

Questão 10 Perante o seguinte fragmento da formulação dos requisitos de uma aplicação de gestão pedagógica, *No sistema académico desta universidade toda a disciplina é fornecida por um e um só departamento, que a entrega a um seu docente responsável (regente). Departamentos e disciplinas são entidades caracterizadas, entre outros atributos, pelo seu nome.*

dois colegas seus discutem sobre qual dos seguintes diagramas de Entidades-Relações (a) e (b), que se seguem, devem adoptar:



(a)



(b)

1. Dê-lhes a sua ajuda, comparando (a) e (b) com base na semântica em SETS que estudou para diagramas deste tipo.
2. Escreva a função que, em notação SETS, converte a informação relacional de um dos formatos (a) ou (b) para o outro, se é que tal função pode ser definida.

RESOLUÇÃO:

1. De acordo com (8.157) teremos, para o diagrama (a)

$$\begin{array}{l}((\#Disciplina \hookrightarrow \#Departamento \times Regente)\times \\ (\#Departamento \hookrightarrow Nome)\times \\ (\#Disciplina \hookrightarrow Nome))_\gamma\end{array}$$

e para o diagrama (b)

$$\begin{array}{l}((\#Disciplina \hookrightarrow \#Departamento \times 1)\times \\ (\#Departamento \hookrightarrow Nome)\times \\ (\#Disciplina \hookrightarrow Nome \times Regente))_\gamma\end{array}$$

ambos os modelos sujeitos ao mesmo invariante:

$$\gamma(\rho,\sigma,\sigma') \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad dom(\rho) = dom(\sigma') \wedge 2^{\pi_1}(rng(\rho)) \subseteq dom(\sigma)$$

É fácil agregar ρ e σ' em ambos os modelos, reconhecendo em $dom(\rho) = dom(\sigma')$ o invariante eqd (8.66) associado à lei (8.69). Logo, o modelo de (a) é afinal o refinamento de

$$\begin{array}{l}((\#Disciplina \hookrightarrow \#Departamento \times Regente \times Nome)\times \\ (\#Departamento \hookrightarrow Nome))_{\gamma'}\end{array}$$

e o modelo de (b) o refinamento de

$$\begin{array}{l}((\#Disciplina \hookrightarrow \#Departamento \times Nome \times Regente)\times \\ (\#Departamento \hookrightarrow Nome))_{\gamma'}\end{array}$$

(eliminando também 1, elemento neutro de $\times$) sujeitos a um invariante mais leve:

$$\gamma(\rho,\sigma) \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad 2^{\pi_1}(rng(\rho)) \subseteq dom(\sigma)$$

Por (8.22) os dois modelos são isomorfos e, portanto, indistinguíveis sob o ponto de vista de especificação. Não vale a pena discutir — é a ajuda que lhes deve dar!

2. Conversão de (b) para (a):

$$\begin{array}{rcll} f(\rho,\sigma,\sigma') & \stackrel{\text{def}}{=} & let & \sigma'_1 = \#Disciplina \hookrightarrow \pi_1(\sigma') \\ & & & \sigma'_2 = \#Disciplina \hookrightarrow \pi_2(\sigma') \\ & & & \rho_1 = \#Disciplina \hookrightarrow \pi_1(\rho) \\ & & in & \langle \rho_1 \bowtie \sigma'_2, \sigma, \sigma'_1 \rangle \end{array}$$

$\square$

Questão 11 Do trabalho laboratorial desta disciplina consta o seguinte modelo de dados,

$$
\begin{array}{rcll}
ActPlan & \cong & \#Act \hookrightarrow Description \times Span \times Resources \times Dependences & \\
Description & \cong & STR & \textit{/*descrição da actividade */} \\
Span & \cong & \mathbb{N} & \textit{/*duração da actividade */} \\
Resources & \cong & \#Res \hookrightarrow \mathbb{N} & \textit{/* tipo e quantidade de recursos necessários para realizar uma actividade */} \\
Dependences & \cong & 2^{\#Act} & \textit{/*actividades precedentes */}
\end{array}
$$

Calcule uma implementação relacional de $ActPlan$, sintetizando a respectiva função de abstracção global.

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{rcl}
ActPlan & \cong & \#Act \hookrightarrow STR \times \mathbb{N} \times (\#Res \hookrightarrow \mathbb{N}) \times 2^{\#Act} \\
& \cong_1 & \#Act \hookrightarrow ((STR \times \mathbb{N}) \times (\#Res \hookrightarrow \mathbb{N})) \times (\#Act \hookrightarrow 1) \\
& \trianglelefteq_2 & (\#Act \hookrightarrow ((STR \times \mathbb{N}) \times (\#Res \hookrightarrow \mathbb{N}))) \times (\#Act \times \#Act \hookrightarrow 1) \\
& \trianglelefteq_3 & ((\#Act \hookrightarrow STR \times \mathbb{N}) \times (\#Act \times \#Res \hookrightarrow \mathbb{N})) \times 2^{\#Act \times \#Act} \\
& \cong_4 & (\#Act \hookrightarrow STR \times \mathbb{N}) \times (\#Act \times \#Res \hookrightarrow \mathbb{N}) \times 2^{\#Act \times \#Act} \\
& \trianglelefteq_5 & 2^{\#Act \times (STR \times \mathbb{N})} \times 2^{(\#Act \times \#Res) \times \mathbb{N}} \times 2^{\#Act \times \#Act} \\
& \cong_6 & 2^{\#Act \times STR \times \mathbb{N}} \times 2^{\#Act \times \#Res \times \mathbb{N}} \times 2^{\#Act \times \#Act}
\end{array}
$$

onde

$$
\begin{array}{rll}
\cong_1 & \left\{ f_1 = \#Act \hookrightarrow [\pi_1 \circ \pi_1 \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_1, \pi_2 \circ \pi_1, dom \circ \pi_2] \right. & \textit{cf.}\ (8.64)\ \text{e}\ (8.23) \\
\trianglelefteq_2 & \left\{ \begin{array}{l} f_2 = \bowtie_n \\ \phi_2 = dpi \end{array} \right. & \textit{cf.}\ (8.72) \\
\trianglelefteq_3 & \left\{ \begin{array}{l} f_3 = \bowtie_n \times g \\ \phi_3 = dpi \times \lambda r.V \end{array} \right. & \textit{cf.}\ (8.72)\ \text{e questão 9} \\
\cong_4 & \left\{ f_4 = [[\pi_1, \pi_2], \pi_3] \right. & \textit{cf.}\ (8.23) \\
\trianglelefteq_5 & \left\{ \begin{array}{l} f_5 = mkf \times mkf \times id \\ \phi_5 = fdp \times fdp \times \lambda r.V \end{array} \right. & \textit{cf.}\ (8.9) \\
\cong_6 & \left\{ f_6 = 2^{[\pi_1, [\pi_2, \pi_3]]} \times 2^{[[\pi_1, \pi_2], \pi_3]} \times id \right. & \textit{cf.}\ (8.23)
\end{array}
$$

sendo a função de abstracção global

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \bigcirc_{i=1}^{6} f_i$$

$\square$

Questão 12 Foi estudado neste curso o processo de cálculo da simulação, sobre listas, da operação de intersecção de dois conjuntos.

Adapte esse raciocínio ao cálculo de uma simulação da reunião de conjuntos representados por listas,

$$
\begin{tikzcd}
2^X \times 2^X \arrow[r, "\cup"] & 2^X \\
X^\star \times X^\star \arrow[u, "elems \times elems"] \arrow[r, "x"'] & X^\star \arrow[u, "elems"']
\end{tikzcd}
$$

que garanta a propriedade de não repetição de elementos.

RESOLUÇÃO:

Teremos, sucessivamente [2],

$$
\begin{array}{rl}
 & elems(x(l_1,l_2)) = elems(l_1) \cup elems(l_2) \\
= & (\left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & \emptyset \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & \{head(l_1)\} \cup elems(tail(l_1)) \end{array} \right.) \cup elems(l_2) \\
= & \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & elems(l_2) \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & (\{head(l_1)\} \cup elems(tail(l_1))) \cup elems(l_2) \end{array} \right. \\
= & \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & elems(l_2) \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & elems(tail(l_1)) \cup (\{head(l_1)\} \cup elems(l_2)) \end{array} \right. \\
= & \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & elems(l_2) \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & elems(tail(l_1)) \cup \left\{ \begin{array}{rcl} head(l_1) \in elems(l_2) & \Rightarrow & elems(l_2) \\ \neg(head(l_1) \in elems(l_2)) & \Rightarrow & \{head(l_1)\} \cup elems(l_2) \end{array} \right. \end{array} \right. \\
= & \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & elems(l_2) \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} belongs(head(l_1), l_2) & \Rightarrow & elems(tail(l_1)) \cup elems(l_2) \\ \neg(belongs(head(l_1), l_2)) & \Rightarrow & elems(tail(l_1)) \cup \{head(l_1)\} \cup elems(l_2) \end{array} \right. \end{array} \right. \\
= & \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & elems(l_2) \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} belongs(head(l_1), l_2) & \Rightarrow & elems(x(tail(l_1), l_2)) \\ \neg(belongs(head(l_1), l_2)) & \Rightarrow & elems(<head(l_1)> \frown x(tail(l_1), l_2)) \end{array} \right. \end{array} \right. \\
= & elems(\left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & l_2 \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} belongs(head(l_1), l_2) & \Rightarrow & x(tail(l_1), l_2) \\ \neg(belongs(head(l_1), l_2)) & \Rightarrow & <head(l_1)> \frown x(tail(l_1), l_2) \end{array} \right. \end{array} \right.)
\end{array}
$$

Em suma, obtemos:

$$
\begin{array}{l}
x(l_1,l_2) \stackrel{\text{def}}{=} \\
\quad \left\{ \begin{array}{rcl} l_1 = <> & \Rightarrow & l_2 \\ \neg(l_1 = <>) & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} belongs(head(l_1), l_2) & \Rightarrow & <> \\ \neg(belongs(head(l_1), l_2)) & \Rightarrow & <head(l_1)> \end{array} \right. \frown x(tail(l_1), l_2) \end{array} \right.
\end{array}
$$

□

Questão 13 Reorde a seguinte definição de uma função

$$
\begin{array}{l}
subl : A^\star \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \to A^\star \\
subl(l,i,n) \stackrel{\text{def}}{=} \\
\quad \left\{ \begin{array}{rcl} n = 0 \vee l = <> & \Rightarrow & <> \\ n > 0 \wedge l \neq <> & \Rightarrow & let \quad t = tail(l) \\ & & in \quad \left\{ \begin{array}{rcl} i = 1 & \Rightarrow & <head(l)> \frown subl(t, i, n-1) \\ i > 1 & \Rightarrow & subl(t, i-1, n) \end{array} \right. \end{array} \right.
\end{array}
$$

que extrai, de uma sequência l, a sua subsequência de n elementos (ou de tantos quantos fôr possível extrair) que começa na i-ésima posição.

Calcule uma implementação iterativa de $subl$ e escreva-a sob a forma de um ciclo-`while` na notação "pseudo-C" usada na sebenta da disciplina.

(**Sugestão**: comece por transformar $subl$ numa instância do esquema linear monádico.)

[2] Justifique cada passo do raciocínio.

RESOLUÇÃO: Repare-se antes de mais [3] que

$$\begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & <head(l)> \frown subl(t, i, n-1) \\ i > 1 & \Rightarrow & subl(t, i-1, n) \end{cases}$$

é o mesmo que

$$\begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & <head(l)> \frown subl(t, i, n-1) \\ i > 1 & \Rightarrow & <> \frown subl(t, i-1, n) \end{cases}$$

e, logo, que

$$\begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & <head(l)> \\ i > 1 & \Rightarrow & <> \end{cases} \frown \begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & subl(t, i, n-1) \\ i > 1 & \Rightarrow & subl(t, i-1, n) \end{cases}$$

ou ainda, estendendo o raciocínio:

$$\begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & <head(l)> \\ i > 1 & \Rightarrow & <> \end{cases} \frown subl(t, \begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & i \\ i > 1 & \Rightarrow & i-1 \end{cases}, \begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & n-1 \\ i > 1 & \Rightarrow & n \end{cases})$$

Logo, estamos perante (9.27), para as substituições

$f(\_, y, \_)$	$subl(y, i, n)$
$p(\_, y, \_)$	$n = 0 \vee y = <>$
u	$<>$
$d(\_, y, \_)$	$\begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & <head(y)> \\ i > 1 & \Rightarrow & <> \end{cases}$
θ	$\frown$
$\_, e(y), \_$	$tail(y), \begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & i \\ i > 1 & \Rightarrow & i-1 \end{cases}, \begin{cases} i = 1 & \Rightarrow & n-1 \\ i > 1 & \Rightarrow & n \end{cases}$

o que conduz, em notação "pseudo-C" bastante livre, a

```
{   A* p =y;
    int j =i;
    int m =n;
    A* r =<>;
    while ((m > 0) && (p != <>))
        {   A h = head(p);
            p = tail(p) ;
            if (j == 1)
                {   m--;
                    r = r ⌢ <h>;
                }
            else j--;
        }
}
```

isto é, ao ciclo-`while` pretendido. □

[3] Justifique cada passo do raciocínio que se segue.