

Universidade do Minho

2003/2004		1.º Semestre <input type="checkbox"/>	2.º Semestre <input checked="" type="checkbox"/>	Anual <input type="checkbox"/>
DISCIPLINAS	Métodos Formais de Programação II (7008N2) + Opção II — Métodos Formais de Programação II (5308P3)	DOCENTE J.N. Oliveira – 406006		
CURSOS	LMCC + LESI			

AULA	SUMÁRIO
<p>Teórica 2004.02.25 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)</p>	<p>Apresentação da disciplina. Equipa docente. Programa da disciplina e seu enquadramento no plano de estudos. Regime de avaliação. Bibliografia. Informação electrónica sobre a disciplina: www.di.uminho.pt/~jno/html/mii.html. Noções gerais de arquitectura de ‘software’.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
<p>Prática 2004.03.01 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)</p>	<p>Revisões de <i>Métodos Formais de Programação I</i>: resolução de questões dos exames. Inscrições nas turmas práticas.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
<p>Prática 2004.03.01 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)</p>	<p>Idêntico ao sumário anterior.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
<p>Teórica 2004.03.03 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)</p>	<p>Introdução às técnicas de refinamento (reificação) de especificações formais. Taxonomia de relações. Simplicidade, sobrejectividade, injectividade e totalidade. Princípio da abstracção dos dados. Relações de abstracção e de representação. Dualidade. Inequações de refinamento da forma $A \leq B$. Exemplos.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
<p>Prática 2004.03.08 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)</p>	<p>Revisões de <i>Métodos Formais de Programação I</i>: resolução de questões dos exames.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.08 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Teórica 03.05.10 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (ausência do docente em reunião interna). O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.15 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Revisões de <i>Métodos Formais de Programação I</i> : resolução de questões dos exames. O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.15 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.03.17 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<i>Refinamento formal de dados</i> : lei da representação por “apontador”: $A \leq A + 1$ Estudo do isomorfismo de totalização de correspondências: $A \rightarrow B \cong (B + 1)^A$ O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.22 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Resolução dos exercícios seguintes: <ul style="list-style-type: none"> • Qualquer sequência finita pode ser representada por uma função finita que indica, explicitamente, que elemento ocupa que posição na sequência. Por exemplo, a sequência $[a, b, a]$ é representada por $\{1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto a\}$. Especifique em VDM-SL a representação $seq2fm$ e a abstracção $fm2seq$ que justificam a inequação $seq\ of\ A \leq \text{map}\ nat\ to\ A \quad (1)$ Por que razão é que a lei acima não é um isomorfismo? <ul style="list-style-type: none"> • Os seguintes quatro exemplos de representação, em notação VDM-SL, da sequência $[a, b, c]$, $\begin{aligned} r_1 &= \{2 \mapsto b, 1 \mapsto a, 3 \mapsto c\} \\ r_2 &= \{a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3\} \\ r_3 &= \{a, b, c\} \\ r_4 &= [(a, a), (b, b), (c, c)] \end{aligned}$ sugerem outros tantos refinamentos possíveis para sequências. Defina o modelo de dados sugerido por cada exemplo e discuta a sua adequação. Em cada caso, indique um contra-exemplo (i.é uma sequência não representável) ou as respectivas funções de abstracção / representação. <p style="text-align: right;">O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.03.24 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<i>Refinamento formal de dados</i> : Propriedades da relação \leq : reflexividade e transitividade e suas provas. Relacionadores e o refinamento estruturado. Leis de refinamento de conjuntos finitos. <p style="text-align: right;">O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.03.29 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Resolução dos exercícios seguintes: <ul style="list-style-type: none"> • Especificar em VDM-SL as funções de abstracção e de representação das seguintes equações de refinamento: $\begin{aligned} 1 \rightarrow A &\cong A + 1 \\ \mathcal{P}A &\leq HTable \end{aligned}$ onde $HTable = \text{map}\ nat\ to\ set\ of\ A$ sujeita ao invariante $inv\ t = \forall n \in dom\ t. \forall a \in t(n). h(a) = n$. <ul style="list-style-type: none"> • Provar, por fusão-cata, que a inversão de listas é função de abstracção e a sua própria representação. <p style="text-align: right;">O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.03.31 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<p><i>Refinamento formal de dados (cont.) : Estudo do repertório de inequações de refinamento e respectivas funções de abstracção e de representação:</i></p> $\mathcal{P}A \leq A^*$ $\mathcal{P}A \leq \mathbf{N} \rightarrow A$ $\mathcal{P}A \leq A \rightarrow B$ $\mathcal{P}A \leq A \rightarrow \mathbf{N}$ $A \rightarrow (B + C) \leq (A \rightarrow B) \times (A \rightarrow C)$ $(C \times A) \rightarrow B \leq C \rightarrow (A \rightarrow B)$ $\mathcal{P}(A \times C) \cong (\mathcal{P}A)^C$ <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.05 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	<p>Resolução dos exercícios seguintes:</p> <p>1.Com base nas propriedades seguintes,</p> $[R, S] \cdot [T, U]^\circ = (R \cdot T^\circ) \cup (S \cdot U^\circ) \quad (2)$ $\langle R, S \rangle^\circ \cdot \langle X, Y \rangle = (R^\circ \cdot X) \cap (S^\circ \cdot Y) \quad (3)$ <p>prove que $[-, _]$ preserva abstracções e que $\langle _, _ \rangle$ preserva representações. Isto é, mostre que $\langle R, S \rangle$ (resp. $[R, S]$) é uma relação de representação (resp. abstracção) sempre que R e S individualmente o são.</p> <p>2.Considere a propriedade</p> $\text{img } i_1 \cup \text{img } i_2 = id \quad (4)$ <p>e</p> <p>(a) mostre que ela capta a ideia da união disjunta de A e B expressa em</p> $\forall x \in A + B. (\exists a \in A . x = i_1 a) \vee (\exists b \in B . x = i_2 b) \quad (5)$ <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.05 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	<p>Idêntico ao sumário anterior.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.07 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<i>Refinamento formal de dados (cont.)</i> : estudo da lei $A \rightarrow D \times (B \rightarrow C) \leq (A \rightarrow D) \times ((A \times B) \rightarrow C) \quad (6)$ O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.14 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<i>Refinamento formal de dados (cont.)</i> : Teorema de desrecursivação genérica: $\mu F \leq (K \rightarrow F K) \times K \quad (7)$ Função de abstracção e invariante concreto. Relações de pertença estrutural (\in_F) e acessibilidade estrutural (\prec_σ). O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.19 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Não houve aula (dispensa dos alunos para assistirem às JOIN'04). O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.19 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Não houve aula (dispensa dos alunos para assistirem às JOIN'04). O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.21 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (dispensa dos alunos para assistirem às JOIN'04). O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.26 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Exercícios de refinamento relacional dos modelos <i>BAMS</i> e <i>PPD</i> das sessões de laboratório das aulas de <i>Métodos Formais de Programação I</i> . Breve apresentação da ferramenta desenvolvida para este efeito em <i>Laboratório de Métodos Formais</i> . O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.04.26 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.04.28 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<i>Refinamento formal de dados (conclusão)</i> : conclusão do estudo das noções de pertinência (\in_F) e acessibilidade estrutural associados à lei (7). Breve abordagem ao refinamento por identificação de classes em UML. Diagramas ER (Entidade-Relação) e sua semântica em VDM-SL. O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.03 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Exercício de desrecursivação do modelo $ \begin{array}{ll} \textit{GenDia} :: & \textit{indiv} : \textit{token} & /*data about an individual*/ \\ & \textit{mother} : [\textit{GenDia}] & /*genealogy of his/her mother (if known)*/ \\ & \textit{father} : [\textit{GenDia}] & /*genealogy of his/her father (if known)*/ \end{array} $ Cálculo de $ \in_F = i_2^o \cdot \pi_2 \cup i_2^o \cdot \pi_3 \quad (8) $ Cálculo de $ \prec_\sigma = \in_F \cdot \sigma \quad (9) $ e da sua expressão em notação VDM-SL. Cálculo das funções de abstracção e de representação associadas ao refinamento do modelo <i>PPD</i> . O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.03 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2003.05.05 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<p><i>Técnicas de refinamento algorítmico (introdução): A eficiência como principal motivação para o refinamento algorítmico.</i></p> <p>Lei de refinamento funcional —satisfação de uma especificação implícita S por uma função f:</p> $S \vdash f \equiv f \cdot \text{dom } S \subseteq S \quad (10)$ <p>Exemplo: resolução da equação</p> $IsPermutation \vdash f$ <p>em ordem a f, sabendo que $IsPermutation = \ker seq2bag$, onde</p> $seq2bag = ([[bnil, bcons]]) \quad (11)$ $bnil = \{\mapsto\} \quad (12)$ $bcons = \oplus \cdot (singb \times id) \quad (13)$ $singb a = \{a \mapsto 1\} \quad (14)$ <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.10 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	<p>Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata).</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.10 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	<p>Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata).</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.05.12 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<p>Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata).</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.17 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	<p>Cálculo de funções de representação e de abstracção. Exemplos BAMS e PPD e sua animação em VDM.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.17 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2004.05.19 4. ^a -feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	<p><i>Técnicas de refinamento algorítmico (cont.)</i> : propriedades da relação \vdash:</p> $\perp \vdash f \quad , \quad \top \vdash f \quad (15)$ $(S \cup R) \vdash f \Leftrightarrow S \vdash f \wedge R \vdash f \quad (16)$ $(S \cap R) \vdash f \Leftrightarrow S \vdash f \wedge R \vdash f \quad (17)$ $(\ker g) \vdash f \equiv g \cdot f = g \quad (18)$ $g \vdash f \equiv f = g \quad (19)$ <p>Exemplo: refinamento de <i>IsPermutation</i>. Leis de refinamento relacional —satisfação progressiva de uma especificação implícita S por outra especificação R:</p> $S \vdash R \equiv R \cdot \text{dom } S \subseteq S \wedge \text{dom } S \subseteq \text{dom } R \quad (20)$ <p>Exemplos. Propriedades de ordem parcial da relação \vdash. Propriedade de F-monotonia.</p> <p>O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.24 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Demonstração das propriedades (15) a (19). Resolução da questão 5 do exame de 12 de Julho de 2003 e da última questão do exame de 22 de Julho 2003 (parte). O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.24 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE _____

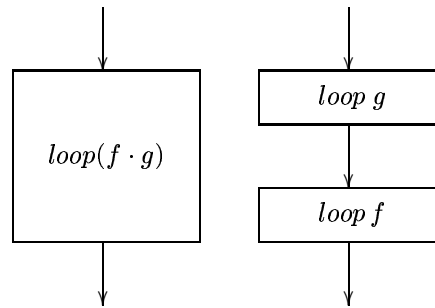
Teórica
2004.05.26
4.^a-feira, 11h00–13h00
Sala DI-A1 (LESI+LMCC)

Técnicas de refinamento (cont.): Lei de refinamento de simultâneo de dados e algoritmos: dada uma especificação $B \xleftarrow{S} A$, uma função de abstracção $A \xleftarrow{F_1} C$ e uma relação de representação $D \xleftarrow{R_2} B$, então dir-se-á que $C \xleftarrow{I} D$ *refina*, ou *implementa* S sse

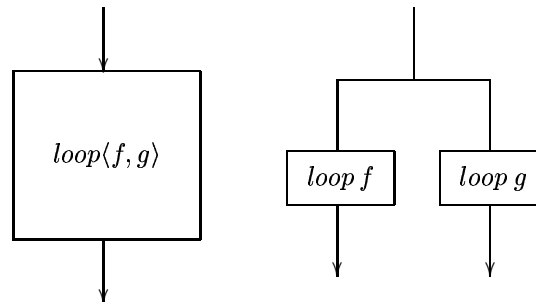
$$S \vdash F_1 \cdot I \cdot R_2 \quad (21)$$

Casos particulares e exemplos.

Refinamento funcional. Leis de fusão “vertical” de processos algorítmicos (leis functoriais, de fusão e de absorção):



Leis de fusão “horizontal” de processos algorítmicos:



A lei de Fokkinga e o seu corolários “banana-split”. Exemplos de aplicação.

O DOCENTE _____

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.31 2. ^a -feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	<p>Resolução da última questão do exame de 22 de Julho 2003 (conclusão) partindo dos factos</p> $\text{dom } S = id \iff S \text{ é reflexiva} \quad (22)$ <p>(todas as relações reflexivas são inteiras) e</p> $\text{ker } R \subseteq \text{ker } (S \cdot R) \iff S \text{ é inteira} \quad (23)$ <p>Análise de tipos e hilomorfização das seguintes funções</p> <pre> j(x, y) == jaux(x, y, false); jaux(x, y, b) == if y = [] or b then b else jaux(x, tl y, x = hd y); h(y) == haux(y, 1); haux(y, b) == if y = [] or b=0 then b else haux(tl y, b * hd y); g(f, y) == gaux(f, y,); gaux(f, y, b) == if y = then b else let x in set y in gaux(f, y x, f(x) union b); f(y) == faux(y, 1); faux(y, b) == if y = 0 then b else faux(y -1, y * b); </pre> <p>e sua interpretação como semântica funcional de ciclos “while”.</p> <p>Preenchimento dos inquéritos de avaliação das aulas práticas da disciplina.</p> <p style="text-align: right;">O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2004.05.31 2. ^a -feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	<p>Idêntico ao sumário anterior.</p> <p style="text-align: right;">O DOCENTE _____</p>

AULA	SUMÁRIO
<p>Teórica 03.06.02 4.^a-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)</p>	<p>Técnicas de refinamento (conclusão): Introdução de parâmetros de acumulação. Desrecursivação algorítmica: cálculo de ciclos for/while ^a a partir do esquema genérico</p> $ \begin{aligned} f & : FY \longrightarrow M \\ f & \stackrel{\text{def}}{=} p \rightarrow u, \theta \cdot (d, f \cdot e) \end{aligned} \tag{24} $ <p>onde</p> $ \begin{aligned} p & : FY \longrightarrow \text{Bool} \\ e & : FY \longrightarrow FY \\ d & : FY \longrightarrow M \\ \theta & : M \times M \longrightarrow M \\ u & : 1 \longrightarrow M \end{aligned} $ <p>e M é um monóide com elemento neutro u. Exemplos de codificação em C/C++. Inversão de código imperativo: o exemplo <code>wc</code> (“word count”). Preenchimento dos inquéritos de avaliação das aulas teóricas. Considerações finais. Encerramento da disciplina.</p> <p style="text-align: right;">O DOCENTE _____</p> <hr style="width: 20%; margin-left: 0;"/> <p>^aVer <i>Operation refinement</i>, June 2000. pp.125–131.</p>

1 Adenda aos sumários de MFP-II/0304

1.1 Proof of (16), p. 8

$$\begin{aligned} & (S \cup R) \vdash f \\ \equiv & \quad \{ \text{definition (10)} \} \\ & f \cdot \text{dom}(S \cup R) \subseteq S \cup R \\ \equiv & \quad \{ \cup\text{-distributivity ensured by composition of lower-adjoints } (f \cdot) \text{ and } \text{dom} \} \\ & (f \cdot \text{dom } S) \cup (f \cdot \text{dom } R) \subseteq S \cup R \\ \equiv & \quad \{ \cup\text{-universal} \} \\ & (f \cdot \text{dom } S) \subseteq S \cup R \quad \wedge \quad (f \cdot \text{dom } R) \subseteq S \cup R \\ \Leftarrow & \quad \{ \subseteq\text{-transitivity} \} \\ & (f \cdot \text{dom } S) \subseteq S \quad \wedge \quad (f \cdot \text{dom } R) \subseteq R \\ \equiv & \quad \{ \text{definition (10)} \} \\ & S \vdash f \quad \wedge \quad R \vdash f \end{aligned}$$

1.2 Proof of (17), p. 8

$$\begin{aligned} & (S \cap R) \vdash f \\ \equiv & \quad \{ \text{definition (10)} \} \\ & f \cdot \text{dom}(S \cap R) \subseteq S \cap R \\ \equiv & \quad \{ \cap\text{-universal} \} \\ & f \cdot \text{dom}(S \cap R) \subseteq S \quad \wedge \quad f \cdot \text{dom}(S \cap R) \subseteq R \\ \Leftarrow & \quad \{ \text{dom}(R \cap S) \subseteq (\text{dom } R) \cap (\text{dom } S); \text{ lower-adjoint } (f \cdot) \text{ is monotone} \} \\ & (f \cdot \text{dom } S) \subseteq S \quad \wedge \quad (f \cdot \text{dom } R) \subseteq R \\ \equiv & \quad \{ \text{definition (10)} \} \\ & S \vdash f \quad \wedge \quad R \vdash f \end{aligned}$$

1.3 Proof of (18), p. 8

$$\begin{aligned} & \ker g \vdash f \\ \equiv & \quad \{ \text{definition} \} \\ & f \cdot \text{dom}(\ker g) \subseteq \ker g \\ \equiv & \quad \{ \text{kernel of a function} \} \\ & f \cdot \text{id} \subseteq g^\circ \cdot g \\ \equiv & \quad \{ \text{shunting rule} \} \\ & g \cdot f \subseteq g \\ \equiv & \quad \{ \text{equality of functions} \} \\ & g \cdot f = g \end{aligned}$$

1.4 Proof of (19), p. 8

$$g \vdash f$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \{ \text{definition} \} \\
&f \cdot \text{dom } g \subseteq g \\
&\equiv \{ \text{function } g \text{ is entire} \} \\
&f \cdot \text{id} \subseteq g \\
&\equiv \{ \text{natural-id} \} \\
&f \subseteq g \\
&\equiv \{ \text{equality of functions} \} \\
&f = g
\end{aligned}$$

1.5 Proof of (22), p. 10

$$\begin{aligned}
&\text{ker } S \text{ is reflexive} \\
&\equiv \{ \text{definition} \} \\
&\text{id} \subseteq \text{ker } S \\
&\equiv \{ \text{definition of kernel; natural-id} \} \\
&\text{id} \cdot \text{id} \subseteq S \cdot S^\circ \\
&\Leftarrow \{ \text{composition is monotonic} \} \\
&\text{id} \subseteq S \wedge \text{id} \subseteq S^\circ \\
&\equiv \{ \text{converses } (\text{id}^\circ = \text{id}) \} \\
&\text{id} \subseteq S \wedge \text{id} \subseteq S \\
&\equiv \{ \text{trivia} \} \\
&\text{id} \subseteq S \\
&\equiv \{ \text{definition} \} \\
&S \text{ is reflexive}
\end{aligned}$$

1.6 Proof of (23), p. 10

$$\begin{aligned}
&\text{ker } R \subseteq \text{ker } (S \cdot R) \\
&\equiv \{ \text{kernel definition} \} \\
&R^\circ \cdot R \subseteq (S \cdot R)^\circ \cdot (S \cdot R) \\
&\equiv \{ \text{converse of composition} \} \\
&R^\circ \cdot R \subseteq R^\circ \cdot S^\circ \cdot S \cdot R \\
&\Leftarrow \{ (R^\circ \cdot) \text{ and } (\cdot R) \text{ are lower-adjoints, thus monotonic} \} \\
&\text{id} \subseteq S^\circ \cdot S \\
&\equiv \{ \text{definition of kernel} \} \\
&\text{id} \subseteq \text{ker } S \\
&\equiv \{ \text{definition of entire relation} \} \\
&S \text{ is entire}
\end{aligned}$$

Relational Operators as Galois Conections

$$(f X) \subseteq Y \equiv X \subseteq (g Y)$$

Description	$f = g^b$	$g = f^\#$	Obs.
converse	$(_)^\circ$	$(_)^\circ$	
Left-division	$(R \cdot)$	$(R \setminus)$	read “ R under ...”
Right-division	$(\cdot R)$	$(/ R)$	read “... over R ”
shunting rule	$(f \cdot)$	$(f^\circ \cdot)$	NB: f is a function
“converse” shunting rule	$(\cdot f^\circ)$	$(\cdot f)$	NB: f is a function
range	rng	$(\cdot \top)$	lower \subseteq restricted to coreflexives
domain	dom	$(\top \cdot)$	lower \subseteq restricted to coreflexives
implication	$(R \cap)$	$(R \Rightarrow)$	Note that $(R \Rightarrow) = (\neg R \cup)$
difference	$(- - R)$	$(R \cup)$	
meet	Δ	\cap	\leq is $(\subseteq \times \subseteq)$
join	\cup	Δ	\sqsubseteq is $(\subseteq \times \subseteq)$
definition	$f X = \bigcap \{Y \mid X \subseteq gY\}$	$g Y = \bigcup \{X \mid f X \subseteq Y\}$	
distributive property	$f(X \cup Y) = (f X) \cup (f Y)$	$g(X \cap Y) = (g X) \cap (g Y)$	