Universidade do Minho

2002/2003	1.º Semestre ☐	2.º Semestre ☒	Anual ☐

DISCIPLINAS	Métodos Formais de Programação II (7008N2) + Opção II — Métodos Formais de Programação II (5308P3)	DOCENTE	J.N. Oliveira – 406006
CURSOS	LMCC + LESI		

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2002.02.26 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Apresentação da disciplina. Equipa docente. Programa da disciplina e seu enquadramento no plano de estudos. Regime de avaliação. Bibliografia. Informação electrónica sobre a disciplina: `www.di.uminho.pt/~jno/html/mii.html`. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.02.03 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Inscrições nas turmas práticas. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.03.03 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2003.03.05 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Introdução às técnicas de refinamento (reificação) de especificações formais. Princípio da abstracção dos dados. Relações de abstracção e de representação. Invertibilidade. Inequações de refinamento da forma $A \leq B$. Exemplos. O DOCENTE ______________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.03.10 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Revisões de *M´etodos Formais de Programaç ˜ao I*. Dedução de $(R^\circ)^\circ = R \quad (1)$ $R \subseteq S \equiv R^\circ \subseteq S^\circ \quad (2)$ $id \subseteq R^\circ \equiv id \subseteq R \quad (3)$ a partir da propriedade universal $S \subseteq R^\circ \equiv S^\circ \subseteq R \quad (4)$ Técnicas de raciocínio por cancelamento e reflexão. Introdução ao VDM++. Exemplo: `stack.vpp`. O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.03.10 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2003.03.12 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados :* leis de isomorfismo envolvendo tipos de dados quasi-indutivos ($\mathcal{P}A$ e $A \rightharpoonup B$): $A \rightharpoonup B \cong (B+1)^A$ $\mathcal{P}A \cong A \rightharpoonup 1$ $(C+B) \rightharpoonup A \cong (C \rightharpoonup A) \times (B \rightharpoonup A)$ Propriedades da relação $\leq$. Introdução ao repertório de *inequações de refinamento* e respectivas funções de abstracção e de representação. O DOCENTE ____________________

<table>
<tr><th>AULA</th><th>SUMÁRIO</th></tr>
<tr><td>Prática
2003.03.17
2.ª-feira, 09h00–11h00
DI-3 (LESI+LMCC)</td><td>

Exercícios de cálculo relacional

1. Inferência de propriedades (por cancelamento e reflexão) a partir da propriedade universal

$$f \cdot R \subseteq S \quad \equiv \quad R \subseteq f^\circ \cdot S \tag{5}$$

2. Dedução da regra de igualdade de funções:

$$f \subseteq g \equiv f = g \equiv f \supseteq g \tag{6}$$

3. Síntese de

$$\langle R, S \rangle \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad (\pi_1^\circ \cdot R) \cap (\pi_2^\circ \cdot S) \tag{7}$$

a partir de

$$(b, c)\langle R, S \rangle a \quad \equiv \quad bRa \wedge cSa$$

e da regra

$$(f\ b)Ra \equiv b(f^\circ \cdot R)a \tag{8}$$

Introdução ao VDM++. Demonstração do exemplo `stackObj.vpp`.

O DOCENTE ____________________

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>AULA</th><th>SUMÁRIO</th></tr>
<tr><td>Prática
2003.03.17
2.ª-feira, 11h00–13h00
DI-3 (LMCC+LESI)</td><td>

Idêntico ao sumário anterior.

O DOCENTE ____________________

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>AULA</th><th>SUMÁRIO</th></tr>
<tr><td>Teórica
2003.03.19
4.ª-feira, 11h00–13h00
Sala DI-A1 (LESI+LMCC)</td><td>

Refinamento formal de dados : leis de isomorfismo envolvendo tipos de dados quasi-indutivos ($\mathcal{P}A$ e $A \rightharpoonup B$):

$$\begin{array}{rcl} 0 \rightharpoonup A & \cong & 1 \\ 1 \rightharpoonup A & \cong & 1 + A \end{array}$$

Estudo do repertório de *inequações de refinamento* e respectivas funções de abstracção e de representação:

$$\begin{array}{rcl} A & \leq & A + 1 \\ A \rightharpoonup B & \leq & \mathcal{P}(A \times B) \\ A \rightharpoonup (B \times C) & \leq & (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C) \\ (C \times A) \rightharpoonup B & \leq & C \rightharpoonup (A \rightharpoonup B) \end{array}$$

O DOCENTE ____________________

</td></tr>
</table>

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.03.24 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	1. Exercício de especificação reversa de um fragmento de SQL e sua tradução em notação VDM-SL. 2. Exercícios de cálculo relacional: dedução de $R \cdot f^{\circ} \subseteq S \quad \equiv \quad R \subseteq S \cdot f$ (9) a partir de (5), e de $[R, S] \quad = \quad (R \cdot i_1^{\circ}) \cup (S \cdot i_2^{\circ})$ (10) a partir da respectiva propriedade universal: $[R, S] \subseteq X \quad \equiv \quad R \subseteq X \cdot i_1 \wedge S \subseteq X \cdot i_2$ (11) O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.03.24 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2003.03.26 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.) : Estudo do repertório de* inequações de refinamento *e respectivas funções de abstracção e de representação:* $\mathcal{P}A \leq A^{\star}$ $\mathcal{P}A \leq \mathbb{N} \rightharpoonup A$ $\mathcal{P}A \leq A \rightharpoonup B$ $\mathcal{P}A \leq A \rightharpoonup \mathbb{N}$ $A \rightharpoonup (B + C) \leq (A \rightharpoonup B) \times (A \rightharpoonup C)$ $(C \times A) \rightharpoonup B \leq C \rightharpoonup (A \rightharpoonup B)$ $\mathcal{P}(A \times C) \cong (\mathcal{P}A)^C$ $A \rightharpoonup D \times (B \rightharpoonup C) \leq (A \rightharpoonup D) \times ((A \times B) \rightharpoonup C)$ O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.03.31 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Conclusão do exercício de especificação reversa de um fragmento de SQL e sua tradução em notação VDM-SL. Primeiro exercício de refinamento: cálculo de uma implementação relacional, em SQL, do modelo BAMS (problema 6 do Guião das aulas práticas de *Métodos Formais de Programação I*). O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.03.31 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2003.04.02 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.) :* Teorema de desrecursivação genérica: $$\mu\mathsf{F} \quad \leq \quad (K \rightharpoonup \mathsf{F}\,K) \times K \qquad (12)$$ Função de abstracção e invariante concreto. Relações de pertença estrutural ($\in_{\mathsf{F}}$) e acessibilidade estrutural ($\prec_\sigma$). Exemplo: síntese da implementação de $DecTree$ em SQL. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 2003.04.07 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Exercício de desrecursivação do modelo $GenDia$ :: $indiv$: $token$ /*data about an individual */ $mother$: $[GenDia]$ /*genealogy of his/her mother (if known) */ $father$: $[GenDia]$ /*genealogy of his/her father (if known) */ Cálculo de $$\in_{\mathsf{F}} \quad = \quad i_2^\circ \cdot \pi_2 \cup i_2^\circ \cdot \pi_2 \qquad (13)$$ Cálculo de $$\prec_\sigma = \in_{\mathsf{F}} \cdot \sigma \qquad (14)$$ e da sua expressão em notação VDM-SL. O DOCENTE ____________

Aula	Sumário
Prática 2003.04.07 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ______________________

Aula	Sumário
Teórica 2003.04.09 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (cont.) :* Lei do refinamento estrutural de tipos indutivos $$\mu\mathsf{F} \;\leq\; \mu\mathsf{G} \quad\Leftarrow\quad \mathsf{F} \leq \mathsf{G} \qquad (15)$$ Exemplos: relações de refinamento entre listas (morfismos $blast$ e $embed$); síntese da implementação de $GenDia$ à custa de $DecTree$. Prova construtiva da lei do refinamento estrutural de tipos indutivos. O DOCENTE ______________________

Aula	Sumário
Prática 2003.04.14 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	1º exercício: prova relacional da lei do cancelamento-+: $$[R,S]\cdot i_1 = R \;,\; [R,S]\cdot i_2 = S \qquad (16)$$ 2º exercício: Sendo dados $$\begin{array}{rcll} DecTree & :: & Q: \; A & \text{/*Question or Decision */} \\ & & R: \; \mathtt{map}\ B\ \mathtt{to}\ DecTree & \text{/*Subtrees */} \\ A & = & 2 & \\ B & = & \ldots & \end{array}$$ e $GenDia$ da aula prática anterior, aplicar a lei (15) ao cálculo do isomorfismo $$GenDia \xleftarrow{dt2gd} DecTree \qquad (17)$$ com base no isomorfismo $$A \times (X+1) \times (X+1) \quad\cong\quad A \times (2 \rightharpoonup X) \qquad (18)$$ O DOCENTE ______________________

Aula	Sumário
Prática 2003.04.14 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ______________________

Aula	Sumário
Teórica 2003.04.16 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Refinamento formal de dados (conclusão) :* Implementação de tipos indutivos polinomais em linguagens com gestão de memória dinâmica: Introdução de apontadores em linguagens tipo C/C++. Introdução à representação gramatical (XML). Representação orientada a objectos. O DOCENTE ________________

Aula	Sumário
Prática 2003.04.28 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Resolução de dois problemas: (1) "apuramento eleitoral" (exemplo de recurso a funções de abstracção para efeitos de "data mining") [a]; (2) cálculo da implementação relacional de $EquipDb$ do modelo PPD [b]:

```
EquipDb    =   map Equip to EquipInfo;
EquipInfo  ::  units:  map Unit to nat
               description:  seq of char
               eStock:  nat                    (19)
Unit       =   Equip | Comp;
Equip      ::  K: token ;
Comp       ::  K: token ;
```

O DOCENTE ________________

[a] Questão 3 do exame da disciplina de 16 de Junho 1999

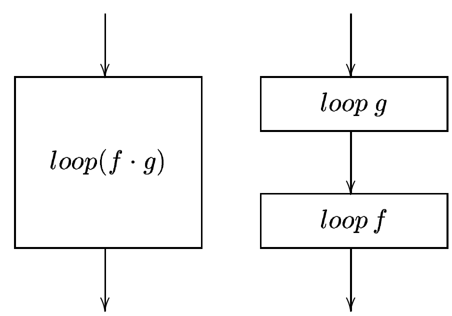
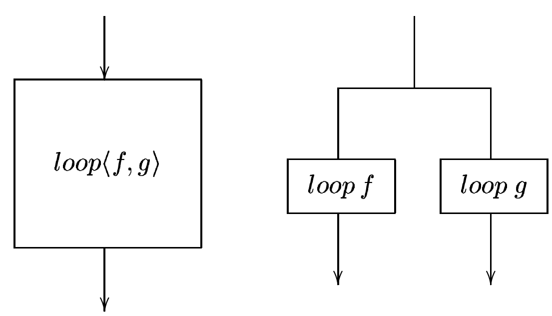
[b] Extensão do problema 09 do Guião das aulas práticas de *Métodos Formais de Programação I*

Aula	Sumário
Prática 2003.04.28 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ________________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 2003.04.30 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	*Técnicas de refinamento algorítmico (introdução) :* A *eficiência* como principal motivação para o refinamento algorítmico. Fases do refinamento algorítmico: *simulação*, redução do não-determinismo, mudança de estrutura de dados virtual. Lei de refinamento funcional —satisfação de uma especificação implícita S por uma função f: $$S \vdash f \quad \equiv \quad f \cdot dom\, S \subseteq S \qquad (20)$$ Exemplo: resolução da equação $$IsPermutation \vdash f$$ em ordem a f, sabendo que $IsPermutation = ker\ seq2bag$, onde $$seq2bag = (\!|[bnil, bcons]|\!) \qquad (21)$$ $$bnil = \underline{\{\mapsto\}} \qquad (22)$$ $$bcons = \oplus \cdot (singb \times id) \qquad (23)$$ $$singb\ a = \{a \mapsto 1\} \qquad (24)$$ O DOCENTE ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 03.05.05 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Cálculo relacional: • demonstração de propriedades da relação $\vdash$: $$\bot \vdash f \quad , \quad \top \vdash f \qquad (25)$$ $$(S \cap R) \vdash f \quad \Leftarrow \quad S \vdash f \wedge R \vdash f \qquad (26)$$ $$(S \cup R) \vdash f \quad \Leftarrow \quad S \vdash f \wedge R \vdash f \qquad (27)$$ $$(ker\ g) \vdash f \quad \equiv \quad g \cdot f = g \qquad (28)$$ $$g \vdash f \quad \equiv \quad f = g \qquad (29)$$ • demonstração da propriedade $$IsPermutation(s, [a] \frown l) \equiv \exists r . IsPermutation(s, [a] \frown r) \wedge IsPermutation(r, l) \qquad (30)$$ isto é: $$IsPermutation \cdot cons = IsPermutation \cdot cons \cdot (id \times IsPermutation) \qquad (31)$$ sabendo que $seq2bag$ é sobrejectiva. O DOCENTE ____________________

Aula	Sumário
Prática 2003.05.05 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (Lmcc+Lesi)	Idêntico ao sumário anterior. O Docente ____________________

Aula	Sumário
Teórica 2003.05.07 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (Lesi+Lmcc)	*Técnicas de refinamento algorítmico (cont.) :* Lei de refinamento relacional — satisfação progressiva de uma especificação implícita S por outra especificação R: $$S \vdash R \quad \equiv \quad R \cdot dom\, S \subseteq S \wedge dom\, S \subseteq dom\, R \qquad (32)$$ Exemplos. Propriedades de ordem parcial da relação $\vdash$. Propriedade de F-monotonia. Refinamento funcional. Leis de fusão "vertical" de processos algorítmicos (leis functoriais, de fusão e de absorção):  Leis de fusão "horizontal" de processos algorítmicos:  Lei de Fokkinga e "banana-split". Exemplos de aplicação. Avaliação da disciplina. O Docente ____________________

AULA	SUMÁRIO
Prática 03.05.12 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata). O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 03.05.12 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata). O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 03.05.14 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (tolerância do Entrerro da Gata). O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 03.05.19 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Conclusão da prova relacional de (31). "Bags". Sua utilidade prática em modelação de sistemas de informação e sua álgebra. Estrutura de espaço vectorial da álgebra de multiconjuntos: operador de reunião de multiconjuntos $\oplus$ (cf. adição vectorial) e $\otimes$ (cf. multiplicação externa por escalar). "Scheduling" e sua álgebra: operações de atraso e compatibilização de "schedules". O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Prática 03.05.19 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Idêntico ao sumário anterior. O DOCENTE ____________

AULA	SUMÁRIO
Teórica 03.05.21 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (participação do docente em reunião internacional). O DOCENTE ____________

<table>
<tr><th>AULA</th><th>SUMÁRIO</th></tr>
<tr><td>Prática
03.05.26
2.ª-feira, 09h00–11h00
DI-3 (LESI+LMCC)</td><td>

Introdução ao cálculo de ciclos `while`. Dado um espaço de estados X, defina-se

$$\mathcal{S}(\texttt{while p do q}) \stackrel{\rm def}{=} \mathcal{S}(p) \longrightarrow \mathcal{S}(\texttt{while p do q}) \cdot \mathcal{S}(\texttt{q})\ ,\ id \qquad (33)$$

onde $X \xrightarrow{\mathcal{S}(\texttt{q})} X$ é um transformador de estados X e $\mathcal{S}(\texttt{p})$ é um predicado sobre X. Exprimir $\mathcal{S}(\texttt{while p do q})$ como um hilomorfismo, isto é, encontrar h e g em

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathcal{S}(\texttt{while p do q})"'] & X + X \arrow[d, "\mathcal{S}(\texttt{while p do q})+id"] \\ X & X + X \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Paramorfismos:

$$\begin{tikzcd} \mu\mathsf{F} \arrow[d, "\langle\!\lbrack k \rbrack\!\rangle"'] & \mathsf{F}\,\mu\mathsf{F} \arrow[l, "in"'] \arrow[d, "\mathsf{F}\,\langle id, \langle\!\lbrack k \rbrack\!\rangle\rangle"] \\ C & \mathsf{F}\,(\mu\mathsf{F} \times C) \arrow[l, "k"] \end{tikzcd} \qquad (34)$$

Exemplo:

$$fac = \langle\!\lbrack [\underline{1}, mul \cdot (suc \times id)] \rbrack\!\rangle$$

Dedução das seguintes regras de conversão de paramorfismos em hilomorfismos: a regra

$$\langle\!\lbrack k \rbrack\!\rangle \quad = \quad (\!| k |\!)_{\mathsf{G}} \cdot [\!(\mathsf{F}\,\langle id, id\rangle \cdot out)\!]_{\mathsf{G}} \qquad (35)$$

para

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{G}\,X & = & \mathsf{F}(\mu\mathsf{F} \times X) \\ \mathsf{G}\,f & = & \mathsf{F}(id \times f) \end{array}$$

e a regra

$$\langle\!\lbrack k \rbrack\!\rangle \quad = \quad \pi_2 \cdot (\!| \langle in \cdot \mathsf{F}\,\pi_1, k \rangle |\!) \qquad (36)$$

O DOCENTE ______________________

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>AULA</th><th>SUMÁRIO</th></tr>
<tr><td>Prática
03.05.26
2.ª-feira, 11h00–13h00
DI-3 (LMCC+LESI)</td><td>

Idêntico ao sumário anterior.

O DOCENTE ______________________

</td></tr>
</table>

Aula	Sumário
Teórica 03.05.28 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Técnicas de refinamento algorítmico (conclusão): Lei de refinamento de simultâneo de dados e algoritmos: dada uma especificação $B \xleftarrow{S} A$, uma função de abstracção $A \xleftarrow{F_1} C$ e uma relação de representação $D \xleftarrow{R_2} B$, então dir-se-á que $C \xleftarrow{I} D$ *refina*, ou *implementa* S sse $S \;\vdash\; F_1 \cdot I \cdot R_2 \qquad (37)$ Lei da introdução de parâmetros de acumulação. Desrecursivação algorítmica: cálculo de ciclos `for/while` [a]. **Condicional de McCarthy** estendido a relações: sendo P correflexiva, define-se [b] $P \longrightarrow R\,,\,S \;=\; (R \cdot P) \cup (S \cdot (id - P)) \qquad (38)$ com as propriedades: $id \longrightarrow R\,,\,S = R \quad , \quad \bot \longrightarrow R\,,\,S = S \qquad (39)$ $(P \longrightarrow \bot\,,\,Q) \longrightarrow R\,,\,S \;=\; P \longrightarrow S\,,\,(Q \longrightarrow R\,,\,S) \qquad (40)$ $(P \longrightarrow id\,,\,Q) \longrightarrow R\,,\,S \;=\; P \longrightarrow R\,,\,(Q \longrightarrow R\,,\,S) \qquad (41)$ $(P \longrightarrow R\,,\,Q) \cdot S \;=\; (P \cdot S) \longrightarrow (R \cdot S)\,,\,(Q \cdot S) \qquad (42)$ O Docente ________________ [a] Ver *Operation refinement*, June 2000. pp.125–131. [b] Aceita-se, dado um predicado p, a notação $p \longrightarrow R\,,\,S$ como abreviatura de $[\![p]\!] \longrightarrow R\,,\,S$.

Aula	Sumário
Prática 03.06.02 2.ª-feira, 09h00–11h00 DI-3 (LESI+LMCC)	Não houve aula (tolerância das JOINT'03). O Docente ________________

Aula	Sumário
Prática 03.06.02 2.ª-feira, 11h00–13h00 DI-3 (LMCC+LESI)	Não houve aula (tolerância das JOINT'03). O Docente ________________

Aula	Sumário
Teórica 03.06.04 4.ª-feira, 11h00–13h00 Sala DI-A1 (LESI+LMCC)	Não houve aula (tolerância das JOINT'03). O Docente ________________

Aula	Sumário
Prática 03.06.09 2.ª feira, 11h00-13h00 (Aula suplementar)	Quadro resumo do cálculo relacional sob a forma de **conexões de Galois** [a]. Funções adjuntas. Exemplo de aplicação do quadro —operadores de divisão relacional: inferência da propridade universal (see below)

$$X \subseteq R \setminus S \quad \equiv \quad R \cdot X \subseteq S \tag{43}$$

e demonstração dos factos seguintes:

$$R \subseteq S \text{ sse a divisão } R \setminus S \text{ é reflexiva} \tag{44}$$

$$R \text{ é transitiva sse } R \text{ está contida em } R \setminus R \tag{45}$$

Cálculo da relação especificada por

$$\in \setminus \in \tag{46}$$

sabendo que

$$a(R \setminus S)c \quad \equiv \quad (\forall b . bRa \Rightarrow bSc) \tag{47}$$

Exercícios de **refinamento algorítmico** por totalização (fusão com pre-condição) [b]:
Mostrar que S é implementada pela sua versão total pre-$S \longrightarrow i_1 \cdot S\ ,\ i_2 \cdot !$, isto é,

$$S \vdash i_1^\circ \cdot (\text{pre-}S \longrightarrow i_1 \cdot S\ ,\ i_2 \cdot !) \tag{48}$$

onde $[\![\text{pre-}S]\!] = \mathit{dom}\, S$.
Para a especificação parcial

```
Find :  A -> map A to B -> B
Find(a)(t) == t(a)
pre a in set dom t;
```

encontrou-se a implementação iterativa seguinte sobre listas,

```
Findl :  A -> seq of (A*B) -> B
Findl(a)(l) == if a = (hd l).#1 then (hd
l).#2 else Findl(a)(tl l)
pre a in set  p.#1 | p in set elems l ;
```

que é parcial. Deduzir a sua versão total

```
find(a)(s) ==
(dcl s':  seq of A*B := s ;
while s' <> [] and a <> (hd s).#1 do (s' :=
tl s');
return if s' = [] then nil else (hd s').#2
);
```

a partir de (48), isto é, calcular versão iterativa de

$$(\mathit{find}\, a) \quad = \quad (a \in) \cdot \mathit{elems} \cdot {\pi_1}^\star \longrightarrow i_1 \cdot (\mathit{Findl}\ a)\ ,\ i_2 \cdot ! \tag{49}$$

O Docente ______________________

[a] Cf. Evariste Galois (1811-1832), matem´atico franc^es. Ver `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Galois.html`
[b] Optimizaç ˜ao: uma s´o visita `a estrutura de dados da entrada.