Métodos Formais de Programação I
1996-97

Exercícios Resolvidos

Caps. 1 e 2

1 Exercícios do Capítulo 1

Resolução 1.4: Para a gramática proposta propõe-se a seguinte assinatura:

$$\Sigma_G = \begin{cases} pop & : & \langle pilha \rangle \to \langle pilha \rangle \\ push & : & \langle elem \rangle \times \langle pilha \rangle \to \langle pilha \rangle \\ empty & : & \to \langle pilha \rangle \\ top & : & \langle pilha \rangle \to \langle elem \rangle \\ true & : & \to \langle bool \rangle \\ false & : & \to \langle bool \rangle \\ empty? & : & \langle pilha \rangle \to \langle bool \rangle \end{cases}$$

□

Resolução 1.6: A gramática proposta é equivalente a:

$$\begin{array}{lcl} \langle A \rangle & ::= & \texttt{a}\ \langle B \rangle \mid \texttt{b}\ \langle A \rangle\ \texttt{a}\ \langle C \rangle \\ \langle C \rangle & ::= & \epsilon \mid \langle B \rangle \langle C \rangle \\ \langle B \rangle & ::= & \texttt{a}\ \texttt{b} \mid \texttt{a}\ \langle D \rangle\ \texttt{c} \\ \langle D \rangle & ::= & \langle A \rangle \mid \langle A \rangle \langle D \rangle \end{array}$$

(relembre-se (1.7) e (1.8) e o Exercício 1.5 da pág. 13) o que conduz à assinatura:

$$\Sigma_G = \begin{cases} \sigma_1 & : & \langle B \rangle \to \langle A \rangle \\ \sigma_2 & : & \langle A \rangle \times \langle C \rangle \to \langle A \rangle \\ \sigma_3 & : & \to \langle C \rangle \\ \sigma_4 & : & \langle B \rangle \times \langle C \rangle \to \langle C \rangle \\ \sigma_5 & : & \to \langle B \rangle \\ \sigma_6 & : & \langle D \rangle \to \langle B \rangle \\ \sigma_7 & : & \langle A \rangle \to \langle D \rangle \\ \sigma_8 & : & \langle A \rangle \times \langle D \rangle \to \langle D \rangle \end{cases}$$

□

Resolução 1.12: Ter-se-á, sucessivamente [1]:

- O facto (1.23) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl} ((f \circ h) \times (g \circ i))(\langle a, b \rangle) & = & ((f \times g) \circ (h \times i))(\langle a, b \rangle) \\ & \updownarrow & \text{por (1.13) e (1.18)} \\ \langle (f \circ h)(a), (g \circ i)(b) \rangle & = & (f \times g)((h \times i)(\langle a, b \rangle)) \\ & \updownarrow & \text{por (1.13) e (1.18)} \\ \langle f(h(a)), g(i(b)) \rangle & = & (f \times g)(\langle h(a), i(b) \rangle) \\ & \updownarrow & \text{por (1.18)} \\ \langle f(h(a)), g(i(b)) \rangle & = & \langle f(h(a)), g(i(b)) \rangle \\ & \updownarrow & \text{propriedade reflexiva da igualdade} \\ & V & \end{array}$$

- O facto (1.24) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl} 1_{A \times B}(\langle a, b \rangle) & = & (1_A \times 1_B)(\langle a, b \rangle) \\ & \updownarrow & \text{def. de } 1_X \text{ e (1.18)} \\ \langle a, b \rangle & = & \langle 1_A(a), 1_B(b) \rangle \\ & \updownarrow & \text{def. de } 1_X \\ \langle a, b \rangle & = & \langle a, b \rangle \\ & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\ & V & \end{array}$$

[1] Deixa-se ao leitor a tarefa de justificar os passos não documentados.

- O facto (1.25) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
([f,g]\circ h)(x) & = & ([f\circ h, g\circ h])(x) \\
 & \updownarrow & \text{por (1.13) e (1.19)} \\
[f,g](h(x)) & = & \langle (f\circ h)(x), (g\circ h)(x)\rangle \\
 & \updownarrow & \text{por (1.19) e (1.13)} \\
\langle f(h(x)), g(h(x))\rangle & = & \langle f(h(x)), g(h(x))\rangle \\
 & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}$$

- O facto (1.26) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
(\pi_1\circ[f,g])(x) & = & f(x) \\
 & \updownarrow & \text{por (1.13)} \\
\pi_1([f,g](x)) & = & f(x) \\
 & \updownarrow & \text{por (1.19)} \\
\pi_1(\langle f(x), g(x)\rangle) & = & f(x) \\
 & \updownarrow & \text{def. de } \pi_1 \\
f(x) & = & f(x) \\
 & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}$$

- O facto (1.27) verifica-se, sendo a prova análoga à anterior.
- O facto (1.28) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
((f\circ h)+(g\circ i))(x) & = & ((f+g)\circ(h+i))(x) \\
 & \updownarrow & \text{por (1.13)} \\
((f\circ h)+(g\circ i))(x) & = & (f+g)((h+i)(x)) \\
 & \updownarrow & \text{por (1.22)} \\
\left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & i_1((f\circ h)(a)) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & i_2((g\circ i)(b)) \end{array}\right. & = & (f+g)(\left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & i_1(h(a)) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & i_2(i(b)) \end{array}\right.) \\
 & \updownarrow & \text{por (1.13) e (B.1)} \\
\left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & i_1(f(h(a))) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & i_2(g(i(b))) \end{array}\right. & = & \left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & (f+g)(i_1(h(a))) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & (f+g)(i_2(i(b))) \end{array}\right. \\
 & \updownarrow & \text{por (1.22)} \\
\left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & i_1(f(h(a))) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & i_2(g(i(b))) \end{array}\right. & = & \left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & i_1(f(h(a))) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & i_2(g(i(b))) \end{array}\right. \\
 & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}$$

- O facto (1.29) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
1_{A+B}(x) & = & (1_A+1_B)(x) \\
 & \updownarrow & \text{def. de } 1_X \text{ e por (1.22)} \\
x & = & \left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & i_1(1_A(a)) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & i_2(1_B(b)) \end{array}\right. \\
 & \updownarrow & \text{def. de } 1_X \\
x & = & \left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & i_1(a) \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & i_2(b) \end{array}\right. \\
 & \updownarrow & \text{subst. de iguais por iguais} \\
x & = & \left\{\begin{array}{lcl} x=i_1(a) & \Rightarrow & x \\ x=i_2(b) & \Rightarrow & x \end{array}\right.
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & \Updownarrow & \text{variante de (B.2)} \\
x & = & x \\
 & \Updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}
$$

$\square$

Resolução 1.13: Ter-se-á, sucessivamente [2]:

- O facto (1.41) verifica-se:

$$
\begin{array}{rcl}
2^{f \circ g}(x) & = & (2^f \circ 2^g)(x) \\
 & \Updownarrow & \text{por (1.35)} \\
\{(f \circ g)(a) \mid \ a \in x\} & = & (2^f \circ 2^g)(x) \\
 & \Updownarrow & \text{por (1.13)} \\
\{f(g(a)) \mid \ a \in x\} & = & 2^f(2^g(x)) \\
 & \Updownarrow & \text{por (1.35)} \\
\{f(g(a)) \mid \ a \in x\} & = & 2^f(\{g(a) \mid \ a \in x\}) \\
 & \Updownarrow & \text{por (1.35)} \\
\{f(g(a)) \mid \ a \in x\} & = & \{f(b) \mid \ b \in \{g(a) \mid \ a \in x\}\} \\
 & \Updownarrow & \text{subst. de iguais por iguais} \\
\{f(g(a)) \mid \ a \in x\} & = & \{f(b) \mid \ b \in \{y \mid \ a \in x \wedge y = g(a)\}\} \\
 & \Updownarrow & \text{por (A.10)} \\
\{f(g(a)) \mid \ a \in x\} & = & \{f(b) \mid \ a \in x \wedge b = g(a)\} \\
 & \Updownarrow & \text{subst. de iguais por iguais} \\
\{f(g(a)) \mid \ a \in x\} & = & \{f(g(a)) \mid \ a \in x\} \\
 & \Updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}
$$

- O facto (1.42) verifica-se:

$$
\begin{array}{rcl}
2^f(\emptyset) & = & \{f(a) \mid \ a \in \emptyset\} \\
 & \text{por (1.35)} & \\
 & = & \{f(a) \mid \ F\} \\
 & = & \emptyset
\end{array}
$$

- O facto (1.43) verifica-se:

$$
\begin{array}{rcl}
2^f(x \cup y) & = & \{f(a) \mid \ a \in x \cup y\} \\
 & \text{por (1.35)} & \\
 & = & \{f(a) \mid \ a \in x \vee a \in y\} \\
 & \text{por (A.8)} & \\
 & = & \{f(a) \mid \ a \in x\} \cup \{f(a) \mid \ a \in y\} \\
 & \text{por } \{x \mid \ p(x) \vee q(x)\} = \{x \mid \ p(x)\} \cup \{x \mid \ q(x)\} & \\
 & = & 2^f(x) \cup 2^f(y) \\
 & \text{por (1.35)} &
\end{array}
$$

- O facto (1.44) verifica-se:

$$
\begin{array}{rcl}
2^f(x \cap y) & = & \{f(a) \mid \ a \in x \cap y\} \\
 & \text{por (1.35)} & \\
 & = & \{f(a) \mid \ a \in x \wedge a \in y\} \\
 & \text{por (A.9)} &
\end{array}
$$

[2] Deixa-se ao leitor a tarefa de justificar os passos não documentados.

$$= \quad \{f(a) \mid a \in x\} \cap \{f(a) \mid a \in y\}$$
dual de passo equivalente acima
$$= \quad 2^f(x) \cap 2^f(y)$$
por (1.35)

- O facto (1.45) verifica-se:

$$(r \circ s)^{-1} = \{\langle \pi_2(q), \pi_1(p)\rangle \mid p \in r \wedge q \in s \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\}$$
por (1.37) e (1.36)
$$= \{\langle \pi_1(q'), \pi_2(p')\rangle \mid p' \in r^{-1} \wedge q' \in s^{-1} \wedge \pi_1(p') = \pi_2(q')\}$$
por def. proj. e (1.36)
$$= \{\langle \pi_1(p), \pi_2(q)\rangle \mid q \in r^{-1} \wedge p \in s^{-1} \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\}$$
por mudança de variáveis
$$= s^{-1} \circ r^{-1}$$
por (1.37)

- O facto (1.46) verifica-se:

$$r \circ (s \cup t) = \{\langle \pi_1(q), \pi_2(p)\rangle \mid p \in r \wedge q \in (s \cup t) \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\}$$
por (1.37)
$$= \{\langle \pi_1(q), \pi_2(p)\rangle \mid p \in r \wedge q \in s \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q) \vee p \in r \wedge q \in t \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\}$$
por (A.8) e cálculo de predicados elementar
$$= \{\langle \pi_1(q), \pi_2(p)\rangle \mid p \in r \wedge q \in s \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\} \cup \{\langle \pi_1(q), \pi_2(p)\rangle \mid p \in r \wedge q \in t \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\}$$
por (A.8)
$$= (r \circ s) \cup (r \circ t)$$
por (1.37)

- O facto (1.47) verifica-se:

$$r \circ \emptyset = \{\langle \pi_1(q), \pi_2(p)\rangle \mid p \in r \wedge q \in \emptyset \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\}$$
por (1.37)
$$= \{\langle \pi_1(q), \pi_2(p)\rangle \mid p \in r \wedge F \wedge \pi_2(p) = \pi_1(q)\}$$
pois $x \in \emptyset = F$
$$= \{\langle \pi_1(q), \pi_2(p)\rangle \mid F\}$$
pois $p \wedge F = F$
$$= \emptyset$$
pois $\{x \mid F\} = \emptyset$

$\square$

Resolução 1.17: Ter-se-á, sucessivamente:

- O facto (1.55) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
(A \hookrightarrow (f \circ g))(\sigma) & = & ((A \hookrightarrow f) \circ (A \hookrightarrow g))(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por (1.13)} \\
\begin{pmatrix} a \\ f(g(\sigma(a))) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma)} & = & (A \hookrightarrow f)((A \hookrightarrow g)(\sigma)) \\
& \updownarrow & \text{por (1.13) e def. de } A \hookrightarrow f \\
\begin{pmatrix} a \\ f(g(\sigma(a))) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma)} & = & (A \hookrightarrow f)(\begin{pmatrix} a \\ g(\sigma(a)) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma)}) \\
& \updownarrow & \text{por def. de } A \hookrightarrow f \\
\begin{pmatrix} a \\ f(g(\sigma(a))) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma)} & = & \begin{pmatrix} a \\ f(g(\sigma(a))) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma)} \\
& \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
& V &
\end{array}$$

- O facto (1.56) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
(rng \circ (A \hookrightarrow f))(\sigma) & = & (2^f \circ rng)(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por (1.13)} \\
rng((A \hookrightarrow f)(\sigma)) & = & 2^f(rng(\sigma)) \\
& \updownarrow & \text{por (1.35) e def. de } A \hookrightarrow f \\
rng(\left(\begin{array}{c} a \\ f(\sigma(a)) \end{array}\right)_{a \in dom(\sigma)}) & = & \{f(x) \mid \ x \in rng(\sigma)\} \\
& \updownarrow & \text{por def. de } rng \\
\{f(\sigma(a)) \mid \ a \in dom(\sigma)\} & = & \{f(x) \mid \ x \in \{\sigma(a) \mid \ a \in dom(\sigma)\}\} \\
& \updownarrow & \text{prop. teoria de conjuntos} \\
\{f(\sigma(a)) \mid \ a \in dom(\sigma)\} & = & \{f(\sigma(a)) \mid \ a \in dom(\sigma)\} \\
& \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
& V &
\end{array}$$

- O facto (1.57) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
(dom \circ (A \hookrightarrow f))(\sigma) & = & dom(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por (1.13)} \\
dom((A \hookrightarrow f)(\sigma)) & = & dom(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por def. de } A \hookrightarrow f \\
dom(\left(\begin{array}{c} a \\ f(\sigma(a)) \end{array}\right)_{a \in dom(\sigma)}) & = & dom(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por def. de } dom \\
\{a \mid \ a \in dom(\sigma)\} & = & dom(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por (A.15)} \\
& V &
\end{array}$$

- O facto (1.58) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
(rng \circ (i \hookrightarrow B))(\sigma) & = & rng(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por (1.53)} \\
rng(\left(\begin{array}{c} i(a) \\ \sigma(a) \end{array}\right)_{a \in dom(\sigma)}) & = & rng(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por def. de } rng \\
\{\sigma(a) \mid \ a \in dom(\sigma)\} & = & rng(\sigma) \\
& \updownarrow & \text{por def. de } rng \\
& V &
\end{array}$$

- O facto (1.59) verifica-se:

$$\begin{array}{rcl}
(A \hookrightarrow f)(\sigma \mid S) & = & ((A \hookrightarrow f)(\sigma)) \mid S \\
& \updownarrow & \text{por def. de } A \hookrightarrow f \text{ e (1.51)} \\
(A \hookrightarrow f)(\left(\begin{array}{c} a \\ \sigma(a) \end{array}\right)_{a \in dom(\sigma) \cap S}) & = & (\left(\begin{array}{c} a \\ f(\sigma(a)) \end{array}\right)_{a \in dom(\sigma)}) \mid S \\
& \updownarrow & \text{por def. de } A \hookrightarrow f \text{ e (1.51)} \\
\left(\begin{array}{c} a \\ f(\sigma(a)) \end{array}\right)_{a \in dom(\sigma) \cap S} & = & \left(\begin{array}{c} a \\ f(\sigma(a)) \end{array}\right)_{a \in dom(\sigma) \cap S} \\
& \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
& V &
\end{array}$$

- O facto (1.60) verifica-se:

$$
\begin{array}{rcl}
(A \hookrightarrow f)(\sigma_1 \cup \sigma_2) & \underset{\text{por def. de } A \hookrightarrow f}{=} & \begin{pmatrix} a \\ f(\sigma_1 \cup \sigma_2(a)) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma_1 \cup \sigma_2)} \\
& \underset{\text{por (A.37)}}{=} & \begin{pmatrix} a \\ f(\sigma_1 \cup \sigma_2(a)) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma_1) \cup dom(\sigma_2)} \\
& \underset{\text{por prop. da def. de compreensão}}{=} & \begin{pmatrix} a \\ f(\sigma_1 \cup \sigma_2(a)) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma_1)} \cup \begin{pmatrix} a \\ f(\sigma_1 \cup \sigma_2(a)) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma_2)} \\
& \underset{\text{pela Def. 1.6}}{=} & \begin{pmatrix} a \\ f(\sigma_1(a)) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma_1)} \cup \begin{pmatrix} a \\ f(\sigma_2(a)) \end{pmatrix}_{a \in dom(\sigma_2)} \\
& \underset{\text{por def. de } A \hookrightarrow f}{=} & (A \hookrightarrow f)(\sigma_1) \cup (A \hookrightarrow f)(\sigma_2)
\end{array}
$$

□

Resolução 1.20:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{A} & : & \Sigma \longrightarrow Sets \\
\mathcal{A}(Tabela) & \stackrel{\text{def}}{=} & 2^{\mathcal{A}(Tuplo)} \\
\mathcal{A}(Tuplo) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathcal{A}(AtrId) \hookrightarrow \mathcal{A}(Valor) \\
\mathcal{A}(AtrIds) & \stackrel{\text{def}}{=} & 2^{\mathcal{A}(AtrId)} \\
\mathcal{A}(Histogama) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathcal{A}(Valor) \hookrightarrow \mathbb{N} \\
\mathcal{A}(Valores) & \stackrel{\text{def}}{=} & 2^{\mathcal{A}(Valor)} \\
\mathcal{A}(Nat) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathbb{N}_0 \\
\mathcal{A}(valores)(a, r) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{t(a) \mid \ t \in r \wedge a \in dom(t)\} \\
\mathcal{A}(atributos)(r) & \stackrel{\text{def}}{=} & \displaystyle\bigcup_{t \in r} dom(t) \\
\mathcal{A}(contagem)(a, v, r) & \stackrel{\text{def}}{=} & card(\{t \mid \ t \in r \wedge a \in dom(t) \wedge t(a) = v\}) \\
\mathcal{A}(histograma)(a, r) & \stackrel{\text{def}}{=} & \begin{pmatrix} v \\ \mathcal{A}(contagem)(a, v, r) \end{pmatrix}_{v \in \mathcal{A}(valores)(a,r)}
\end{array}
$$

NB: Não é necessário especificar modelos para as espécies $Valor$ e $AtrId$, pois o modelo nada presume sobre elas (*cf.* parametrização). □

Resolução 1.32:

1. Propõe-se:

$$
\begin{array}{rcll}
nomes & : & PlanoEstudos \rightarrow 2^{Nome} & \\
nomes(pe) & \stackrel{\text{def}}{=} & let & ob = \{d \mid \ d \in pe \wedge \text{is-}Obrigat(d)\} \\
& & & op = pe - ob \\
& & in & 2^N(ob) \cup \bigcup_{d \in op} 2^N(D(d))
\end{array}
$$

2. Propõe-se:

$$
\begin{array}{rcll}
areas & : & PlanoEstudos \rightarrow 2^{ACien} & \\
areas(pe) & \stackrel{\text{def}}{=} & let & ob = \{d \mid \ d \in pe \wedge \text{is-}Obrigat(d)\} \\
& & & op = pe - ob \\
& & in & (\bigcup_{d \in op} 2^{AC}(D(d))) - 2^{AC}(ob)
\end{array}
$$

□

Resolução 1.33: Ter-se-á [3]:

(A.68) — esta igualdade converte-se em

$$\begin{array}{rcl}
(g^* \circ f^*)(s) & = & ((g \circ f)^*)(s) \\
 & \updownarrow & \text{(1.13)} \\
g^*(f^*(s)) & = & ((g \circ f)^*)(s) \\
 & \updownarrow & \text{(1.63)} \\
g^*(f^*(s)) & = & < (g \circ f)(a) \mid a \leftarrow s > \\
 & \updownarrow & \text{(1.63)} \\
g^*(< f(a) \mid a \leftarrow s >) & = & < g(f(a)) \mid a \leftarrow s > \\
 & \updownarrow & \text{(1.63)} \\
< g(b) \mid b \leftarrow < f(a) \mid a \leftarrow s > > & = & < g(f(a)) \mid a \leftarrow s > \\
 & \updownarrow & \\
 & V &
\end{array}$$

(A.74) — esta igualdade converte-se em

$$\begin{array}{rcl}
(length \circ f^*)(s) & = & length(s) \\
 & \updownarrow & \\
length(f^*(s)) & = & length(s) \\
 & \updownarrow & \text{(1.63)} \\
length(< f(a) \mid a \leftarrow s >) & = & length(s) \\
 & \updownarrow & \\
 & V &
\end{array}$$

(A.78) — esta igualdade converte-se em

$$\begin{array}{rcl}
(elems \circ f^*)(s) & = & (2^f \circ elems)(s) \\
 & \updownarrow & \\
elems(f^*(s)) & = & (2^f \circ elems)(s) \\
 & \updownarrow & \text{(1.63)} \\
elems(< f(a) \mid a \leftarrow s >) & = & 2^f(elems(s)) \\
 & \updownarrow & \text{(1.35)} \\
elems(< f(a) \mid a \leftarrow s >) & = & \{f(a) \mid \ a \in elems(s)\} \\
 & \updownarrow & \\
 & V &
\end{array}$$

(A.83) — esta igualdade converte-se em

$$\begin{array}{rcl}
(tail \circ f^*)(s) & = & (f^* \circ tail)(s) \\
 & \updownarrow & \text{(1.13)} \\
tail(f^*(s)) & = & f^*(tail(s)) \\
 & \updownarrow & \text{(1.63)} \\
tail(< f(a) \mid a \leftarrow s >) & = & < f(a) \mid a \leftarrow tail(s) > \\
 & \updownarrow & \\
 & V &
\end{array}$$

□

Resolução 1.35:

[3] Deixa-se ao leitor a tarefa de justificar passos por documentar.

1. Basta-nos mostrar que a expressão

$$x \dagger \underbrace{y \dagger \left(\begin{array}{c} a \\ x(a)+y(a) \end{array} \right)_{a \in dom(x|(dom(y)))}}_{z}$$

designa exactamente o mesmo que o lado direito de (1.81). Repare-se em primeiro lugar que

$$dom(x \mid (dom(y))) = dom(x) \cap dom(y)$$

Recorrendo ao facto (A.55), ter-se-á a sub-expressão z equivalente a

$$y \setminus (dom(x)) \cup \left(\begin{array}{c} a \\ x(a)+y(a) \end{array} \right)_{a \in dom(x) \cap dom(y)}$$

(O leitor reparará facilmente que o facto

$$X - (Y \cap X) \quad = \quad X - Y \tag{1}$$

foi também útil neste raciocínio). Apliquemos agora (A.55) a $x \dagger z$ e obteremos $x \setminus dom(z) \cup z$. Falta apenas desenvolver $dom(z)$:

$$\begin{array}{rcl} dom(z) & \underset{\text{por (A.37) e (A.52)}}{=} & (dom(y) - dom(x)) \cup (dom(x) \cap dom(y)) \\ & \underset{\text{por (A.14)}}{=} & (dom(y) \cap \overline{dom(x)}) \cup (dom(x) \cap dom(y)) \\ & \underset{\text{por (A.24)}}{=} & dom(y) \cap (\overline{dom(x)} \cup dom(x)) \\ & \underset{\text{def. de } \overline{A}}{=} & dom(y) \end{array}$$

Juntando tudo ter-se-á, de facto

$$(x \setminus dom(y)) \cup (y \setminus dom(x)) \cup \left(\begin{array}{c} a \\ x(a)+y(a) \end{array} \right)_{a \in dom(x) \cap dom(y)}$$

tal como em (1.81).

2. Propõe-se:

$$\begin{array}{rcl} \otimes & : & \mathbb{N} \times MSet(A) \to MSet(A) \\ n \otimes \sigma & \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\begin{array}{c} a \\ n \times \sigma(a) \end{array} \right)_{a \in dom(\sigma)} \end{array}$$

Prova da propriedade proposta (deixa-se ao leitor a tarefa de justificar os passos dados, que são elementares):

$$\begin{array}{rcl} n \otimes (m \otimes \sigma) & = & n \otimes (\left(\begin{array}{c} a \\ m \times \sigma(a) \end{array} \right)_{a \in dom(\sigma)}) \\ & = & \left(\begin{array}{c} a \\ n \times (m \times \sigma(a)) \end{array} \right)_{a \in dom(\sigma)} \\ & = & \left(\begin{array}{c} a \\ (n \times m) \times \sigma(a)) \end{array} \right)_{a \in dom(\sigma)} \\ & = & (n \times m) \otimes \sigma \end{array}$$

□

Resolução 1.36: Propõe-se

$$\begin{array}{rcl} \Cap & : & MSet(A) \times MSet(A) \longrightarrow MSet(A) \\ x \Cap y & \stackrel{\text{def}}{=} & \left(\begin{array}{c} a \\ inf(x(a), y(a)) \end{array} \right)_{a \in dom(x) \cap dom(y)} \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} inf & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ inf(x,y) & \stackrel{\text{def}}{=} & \left\{ \begin{array}{lcl} x \leq y & \Rightarrow & x \\ x > y & \Rightarrow & y \end{array} \right. \end{array}$$

□

Resolução 1.38:

1. A relação de decomposição de equipamentos em sub-equipamentos deverá ser acíclica (de outra forma teremos equipamentos "infinitos").

   Formalmente:

$$\begin{array}{rcll} \phi(\sigma) & \stackrel{\text{def}}{=} & let & x = (\#Equip \hookrightarrow dom)(\sigma) \\ & & & y = \left(\begin{array}{c} e \\ \{e' \mid \langle 2, e' \rangle \in x(e)\} \end{array} \right)_{e \in dom(x)} \\ & & in & acyclic(discollect(y)) \end{array}$$

   onde $discollect$ e $acyclice$ são as funções que vêm nos Exercícios 2.59 e 2.24, respectivamente.

2. Propõe-se aqui uma versão total e não a parcial sugerida no 'template' dado:

$$explode : \#Equip \times Equip \longrightarrow Comps$$

$$explode(e,\sigma) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcll} e \in dom(\sigma) & \Rightarrow & let & b = \sigma(e) \\ & & in & \bigoplus_{u \in dom(b)} \left\{ \begin{array}{lcl} u = \langle 1, c \rangle & \Rightarrow & \left(\begin{array}{c} c \\ b(u) \end{array} \right) \\ u = \langle 2, e' \rangle & \Rightarrow & b(u) \otimes explode(e', \sigma) \end{array} \right. \\ \neg(e \in dom(\sigma)) & \Rightarrow & (\quad) & \end{array} \right.$$

□

Resolução 1.40: Veja-se o Exercício 1.42. □

Resolução 1.47: Propõe-se a seguinte especificação:

$$clear(sigma,k,d) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{lcll} k \notin dom(\sigma) & \Rightarrow & \sigma & \\ k \in dom(\sigma) & \Rightarrow & let & x = \sigma(k) \\ & & & w = W(x) \\ & & & w_1 = \left(\begin{array}{c} n \\ C(w(n)) \end{array} \right)_{n \in dom(w) \wedge D(w(n)) \leq d} \\ & & & w_2 = w \setminus dom(w_1) \\ & & & c = C(x) \\ & & & c_1 = \{x \in c \mid D(x) \leq d\} \\ & & & c_2 = c - c1 \\ & & & b = B(x) + \sum_{k \in dom(w_1)} w_1(k) - \sum_{x \in c_1} C(x) \\ & & in & \sigma \dagger \left(\begin{array}{c} k \\ \langle H(x), b, w_2, c_2 \rangle \end{array} \right) \end{array} \right.$$

□

2 Exercícios do Capítulo 2

Resolução 2.6:

1. Vamos definir os isomorfismos pedidos da direita para a esquerda. Ter-se-á:

(2.37) $A \times B \cong B \times A$

$$[\pi_2, \pi_1]$$

(2.38) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

$$[\pi_1 \circ \pi_1, [\pi_2 \circ \pi_1, \pi_2]]$$

(2.39) $A \times 1 \cong A$

$$\lambda a \cdot \langle a, NIL \rangle$$

(2.40) $A + B \cong B + A$

$$\lambda \langle et, x \rangle \cdot \begin{cases} (et = 1) \Rightarrow \langle 2, x \rangle \\ (et = 2) \Rightarrow \langle 1, x \rangle \end{cases}$$

(2.41) $A + (B + C) \cong (A + B) + C$

$$\lambda \langle et, x \rangle \cdot \begin{cases} (et = 1) \Rightarrow \langle 1, \langle 1, x \rangle \rangle \\ (et = 2) \Rightarrow \begin{cases} (\pi_1(x) = 1) \Rightarrow \langle 1, \langle 2, x \rangle \rangle \\ (\pi_1(x) = 2) \Rightarrow \langle 2, x \rangle \end{cases} \end{cases}$$

(2.42) $A + 0 \cong A$

$$\lambda a \cdot \langle 1, a \rangle$$

(2.43) $A \times 0 \cong 0$

a função identidade no conjunto vazio

(2.44) $A \times (B + C) \cong (A \times B) + (A \times C)$

$$\lambda \langle et, \langle a, x \rangle \rangle \cdot \begin{cases} (et = 1) \Rightarrow \langle a, \langle 1, x \rangle \rangle \\ (et = 2) \Rightarrow \langle a, \langle 2, x \rangle \rangle \end{cases} \tag{2}$$

(2.46) $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n} \cong A^n$

$$\lambda \sigma . \langle \sigma(1), \ldots, \sigma(n) \rangle$$

(2.47) $\underbrace{A + \ldots + A}_{n} \cong n \times A$

$$\lambda x . x$$

2. Trata-se de (2.47) seguida de (2.39):

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 1}_{2} &\cong 2 \times 1 \\ &\cong 2 \end{aligned}$$

□

Resolução 2.15: As primeiras reticências completam-se com:

$$\ldots = \begin{cases} fs(i) = (\ ) & \Rightarrow fs \setminus \{i\} \\ \neg(fs(i) = (\ )) & \Rightarrow fs \end{cases}$$

As segundas reticências completam-se com:

$$\begin{array}{lll} \ldots = & let & i = head(p) \\ & & t = tail(p) \\ & in & \begin{cases} i \notin dom(fs) & \Rightarrow fs \\ i \in dom(fs) & \Rightarrow \begin{cases} \text{is-}File(fs(i)) & \Rightarrow fs \\ \text{is-}Dir(fs(i)) & \Rightarrow fs \dagger \begin{pmatrix} i \\ rmdir(fs(i), t) \end{pmatrix} \end{cases} \end{cases} \end{array}$$

□

Resolução 2.22: Prova por indução sobre $\mathbb{N}_0$:

1. *Caso de Base*: ($k = 0$). Tem-se, neste caso

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = & 0^2 \\
 & \updownarrow & \text{expansão de } f \text{ para } k = 0 \\
0 & = & 0 \\
 & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}$$

2. *Salto indutivo*: ($k > 0$)

   (a) *Hipótese de indução*:

   $$f(k-1) = (k-1)^2$$

   (b) *Passo*: Ter-se-á:

$$\begin{array}{rcl}
f(k) & = & k^2 \\
 & \updownarrow & \text{expansão de } f \text{ para } k > 0 \\
impar(k) + f(k-1) & = & k^2 \\
 & \updownarrow & \text{expansão de } impar \\
2k - 1 + f(k-1) & = & k^2 \\
 & \updownarrow & \text{hipótese de indução} \\
2k - 1 + (k-1)^2 & = & k^2 \\
 & \updownarrow & \text{expansão do binónio} \\
2k - 1 + k^2 - 2k + 1 & = & k^2 \\
 & \updownarrow & \text{cancelamento de simétricos} \\
k^2 & = & k^2 \\
 & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}$$

□

Resolução 2.23: Prova por indução sobre 2^X:

1. *Caso de Base*: ($x = \emptyset$). Tem-se, neste caso

$$\begin{array}{rcl}
elems(list(\emptyset)) & = & \emptyset \\
 & \updownarrow & \text{expansão de } list \text{ para } x = \emptyset \\
elems(<>) & = & \emptyset \\
 & \updownarrow & \text{por (A.75)} \\
\emptyset & = & \emptyset \\
 & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}$$

2. *Salto indutivo*: ($x \supset \emptyset$)

   (a) *Hipótese de indução*:

   $$\forall e \in x : elems(list(x - \{e\})) = x - \{e\}$$

   (b) *Passo*: Ter-se-á:

$$\begin{array}{rcl}
elems(list(x)) & = & x \\
 & \updownarrow & \text{expansão de } list \text{ para } x \neq \emptyset \\
elems(cons(e, list(x - \{e\}))) & = & x \\
 & \updownarrow & \text{por (A.76)} \\
\{e\} \cup elems(list(x - \{e\}))) & = & x
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
 & \updownarrow & \text{hipótese de indução} \\
\{e\} \cup (x - \{e\}) & = & x \\
 & \updownarrow & \text{por (A.14), (A.25), } etc. \\
x & = & x \\
 & \updownarrow & \text{prop. refl. da igualdade} \\
 & V &
\end{array}
$$

□

Resolução 2.26:

1. O facto a demonstrar ou refutar é
$$\forall l \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{N} : \phi(l) \Rightarrow \phi(ins(l, a))$$
O seu significado informal é o de garantir que uma lista l não tem elementos repetidos. Vamos tentar provar que ins preserva ϕ.
Prova por indução sobre $A^\star$:
   (a) *Caso de Base*: ($l = <>$). Tem-se, neste caso
$$
\begin{array}{rcl}
\phi(<>) & \Rightarrow & \phi(ins(<>, a)) \\
 & \updownarrow & \\
length(<>) = card(elems(<>)) & \Rightarrow & length(ins(<>, a)) = card(elems(ins(<>, a))) \\
 & \updownarrow & \\
0 = card(\emptyset) & \Rightarrow & length(<a>) = card(elems(<a>)) \\
 & \updownarrow & \\
0 = 0 & \Rightarrow & 1 = card(\{a\}) \\
 & \updownarrow & \\
V & \Rightarrow & 1 = 1 \\
 & \updownarrow & \\
V & \Rightarrow & V \\
 & \updownarrow & \\
 & V &
\end{array}
$$
   (b) *Salto indutivo*: ($l \neq <>$)
      i. *Hipótese de indução*:
$$\phi(tail(l)) \Rightarrow \phi(ins(tail(l), a))$$
      ii. *Passo*: A demonstração a fazer é uma implicação de implicações,
$$(\phi(tail(l)) \Rightarrow \phi(ins(tail(l), a))) \quad \Rightarrow \quad (\phi(l) \Rightarrow \phi(ins(l, a)))$$
      que se reduz a
$$\phi(ins(tail(l), a)) \wedge \phi(l) \quad \Rightarrow \quad \phi(ins(l, a)) \tag{3}$$
      uma vez que $\phi(l)$ é mais forte que $\phi(tail(l))$ [4]. Mas repare-se que (1) é falso, isto é, que existem l e a tais

[4] Veja-se o porquê desta simplificação, que é normalmente útil em demonstração de invariantes:
$$
\begin{array}{c}
(a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow d) \\
\updownarrow \\
((a \Rightarrow b) \wedge c) \Rightarrow d \\
\updownarrow \\
((\neg a \vee b) \wedge c) \Rightarrow d \\
\updownarrow \\
(\neg a \wedge c \vee b \wedge c) \Rightarrow d \\
\updownarrow \\
(b \wedge c) \Rightarrow d
\end{array}
$$
O último passo só é válido quando a é logicamente mais fraco que c.

que $\phi(ins(tail(l), a)) \wedge \phi(l) \wedge \neg\phi(ins(l, a))$ — faça-se, por exemplo, $l = $ <2, 1> e $a = 1$. Logo a prova fracassa e assim se mostra que ins não preserva o invariante ϕ.

2. A prova anterior só fracassou porque l pode não estar estritamente ordendada. Por outro lado, ins parece inserir ordenadamente um elemento numa lista. Isto sugere que uma propriedade que ins preserva como invariante é

$$\varphi(l) \stackrel{\text{def}}{=} \forall i, j \leq length(l) : i < j \Rightarrow l(i) < l(j)$$

Repare-se que φ é, aliás, logicamente mais forte que ϕ.

□

Resolução 2.36: Vamos aplicar o Teorema de Kleene, para $f(x) = R \cup x^{-1}$. Estando garantida a continuidade de f (porquê?), ter-se-á (justifique os passos dados):

$$\begin{array}{rcl} f^0(\emptyset) & = & \emptyset \\ f^1(\emptyset) & = & R \\ f^2(\emptyset) & = & R \cup R^{-1} \\ f^3(\emptyset) & = & R \cup (R \cup R^{-1})^{-1} \\ & = & R \cup R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} \\ & = & R \cup R^{-1} \cup R \\ & = & R \cup R^{-1} \end{array}$$

Logo $\mu f = R \cup R^{-1}$ (*i.e.*, o fecho simétrico de R).

Coincidirá $R \cup R^{-1}$ com o maior dos pontos-fixos de f? Em geral, não: é fácil ver que qualquer relação simétrica que contenha R é ponto fixo de f:

$$\begin{array}{rcl} f(S \cup S^{-1}) \text{ tal que } S \text{ inclui } R & = & R \cup (S \cup S^{-1})^{-1} \\ & = & R \cup S^{-1} \cup (S^{-1})^{-1} \\ & = & R \cup S^{-1} \cup S \\ & = & R \cup S \cup S^{-1} \\ & = & S \cup S^{-1} \end{array}$$

A maior de todas essas relações S é, obviamente, o supremo $P \times P$. □

Resolução 2.38: Para $R = \emptyset$ a equação

$$x = 1_P \cup R \cup x^{-1} \cup R \circ x$$

simplifica-se em

$$x = 1_P \cup x^{-1}$$

Estamos, pois, na situação do Exercício 2.36, para o caso $R = 1_P$. Ter-se-á, de imediato (justifique os passos dados):

$$\begin{array}{rcl} \mu f & = & 1_P \cup (1_P)^{-1} \\ & = & 1_P \cup \{\langle q, p\rangle \mid (p, q) \in 1_P\} \\ & = & 1_P \cup \{\langle p, p\rangle \mid (p, p) \in 1_P\} \\ & = & 1_P \cup 1_P \\ & = & 1_P \end{array}$$

Logo, para $R = \emptyset$, $\mu f = 1_P$.

Para mostrar que, para qualquer R, $P \times P$ é o maior de todos os pontos-fixos de f basta mostar que é ponto fixo (pois $P \times P$ é o limite universal superior do reticulado $2^{P \times P}$). Ter-se-á (justifique os passos dados):

$$\begin{array}{rcl} f(P \times P) & = & 1_P \cup R \cup (P \times P)^{-1} \cup R \circ (P \times P) \\ & = & 1_P \cup R \cup (P \times P) \cup R \circ (P \times P) \\ & = & P \times P \end{array}$$

Logo, é ponto fixo. $\square$

Resolução 2.39: Antes de mais, vamos simplificar a equação dada:

$$
\begin{array}{rcl}
X & \cong & A \times X + (X \hookrightarrow 0) + B \times X \\
& \updownarrow & \text{por (2.109)} \\
X & \cong & A \times X + (0+1)^X + B \times X \\
& \updownarrow & \text{por (2.42) e (2.107)} \\
X & \cong & A \times X + 1 + B \times X \\
& \updownarrow & \text{por (2.37) e (2.38)} \\
X & \cong & 1 + A \times X + B \times X \\
& \updownarrow & \text{por (2.44)} \\
X & \cong & 1 + (A+B) \times X
\end{array}
$$

É fácil de ver que, afinal, estamos perante uma instância de (2.29). Logo a menor solução da equação dada é $(A+B)^\star$. $\square$

Resolução 2.40: Este exercício resolve-se mostrando que $pack$ é injectiva mas não é sobrejectiva, logo não é uma bijecção. $\square$

Resolução 2.41: Propõe-se:

$$
\begin{array}{rcl}
refsTo & : & WWW \times Ref \longrightarrow 2^{Ref} \\
refsTo(\sigma, r) & \stackrel{\text{def}}{=} & \{r' \in dom(\sigma) \mid \langle 2, r\rangle \in elems(\sigma(r'))\}
\end{array}
$$

$\square$

Resolução 2.42:

1. Tem-se: para $i = n = 2$:

$$
\begin{array}{rcl}
subl(<2,3,1,1,2>, 2, 2) & = & subl(<3,1,1,2>, 1, 2) \\
& = & <3> \frown subl(<1,1,2>, 1, 1) \\
& = & <3> \frown <1> \frown subl(<1,2>, 1, 0) \\
& = & <3> \frown <1> \frown <> \\
& = & <3,1>
\end{array}
$$

para $i = n = 3$:

$$
\begin{array}{rcl}
subl(<2,3,1,1,2>, 3, 3) & & subl(<3,1,1,2>, 2, 3) \\
& = & subl(<1,1,2>, 1, 3) \\
& = & <1> \frown subl(<1,2>, 1, 2) \\
& = & <1,1> \frown subl(<2>, 1, 1) \\
& = & <1,1,2> \frown subl(<>, 1, 0) \\
& = & <1,1,2> \frown <> \\
& = & <1,1,2>
\end{array}
$$

para $i = 4$, $n = 3$:

$$
\begin{array}{rcl}
subl(<2,3,1,1,2>, 4, 3) & = & subl(<3,1,1,2>, 3, 3) \\
& = & subl(<1,1,2>, 2, 3)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= subl(<1,2>,1,3)\\
&= <1> \frown subl(<2>,1,2)\\
&= <1,2> \frown subl(<>,1,1)\\
&= <1,2> \frown <>\\
&= <1,2>
\end{aligned}
$$

A intuição diz-nos que $subl$ extrai de uma sequência l a sua subsequência de n elementos (ou os que fôr possível extrair) que começa na i-esima posição.

2. O facto a provar é

$$\forall x \in A^\star : subl(x, 1, length(x)) = x$$

(= x é idêntica à sua própria sub-sequência de igual comprimento a começar na 1.ª posição).
Prova por indução sobre $A^\star$:

   (a) *Caso de Base*: ($x = <>$). Tem-se, neste caso, trivialmente:

$$
\begin{aligned}
subl(<>,1,length(<>)) = <> &\Leftrightarrow <> = <>\\
&\Leftrightarrow V
\end{aligned}
$$

   (b) *Salto indutivo*: ($x \neq <>$)

      i. *Hipótese de indução*:

$$\forall x \in A^\star : subl(tail(x), 1, length(tail(x))) = tail(x)$$

      ii. *Passo*: Teremos, sucessivamente:

$$
\begin{aligned}
subl(x,1,length(x)) &\underset{\text{pois } length(x) > 0}{=} let \quad h = head(x)\\
&\qquad\qquad t = tail(l)\\
&\qquad in \quad <h> \frown subl(t, 1, length(x) - 1)\\
&\underset{\text{por (A.85)}}{=} <head(x)> \frown subl(tail(x), 1, length(tail(x)))\\
&\underset{\text{pela H.indução}}{=} <head(x)> \frown tail(x)\\
&= x
\end{aligned}
$$

como se pretendia demonstrar.

□

Resolução 2.44:

1. Propõe-se

$$msetTot(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a \in dom(\sigma)} \sigma(a)$$

mas repare-se que, por $+$ não ser idempotente, $\sum_{a \in dom(\sigma)} \sigma(a) \neq \sum rng(\sigma)$.

2. Propõe-se

$$msetAgl(\rho, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} b \\ msetTot(\rho \mid \{a \in dom(\sigma) \mid b = \sigma(a)\}) \end{array} \right)_{b \in rng(\sigma)}$$

— mas é preciso tomar consciência do comportmento desta função quando $dom(\sigma) \subset dom(\rho)$...

3. Faça-se $\sigma = \rho$ acima (o que implica que o codomínio B terá que ser $\mathbb{N}$) e ter-se-á:

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{c} b \\ msetTot(\rho \mid \{a \in dom(\rho) \mid b = \rho(a)\}) \end{array} \right)_{b \in rng(\rho)}\\
= &\left(\begin{array}{c} b \\ \sum_{a \in dom(\rho) \wedge b = \rho(a)} \rho(a) \end{array} \right)_{b \in rng(\rho)}\\
= &\left(\begin{array}{c} b \\ \sum_{a \in dom(\rho) \wedge b = \rho(a)} b \end{array} \right)_{b \in rng(\rho)}
\end{aligned}
$$

É fácil de ver que, se ρ for injectiva, se terá

$$\ldots \quad = \quad \left(\begin{array}{c} b \\ b \end{array} \right)_{b \in rng(\rho)}$$

obtendo-se de facto a função identidade em $rng(\rho)$. Mas tal não acontecerá se ρ não for injectiva: em lugar da imagem b teremos $b \times card(\{a \in dom(\rho) \mid b = \rho(a)\})$.
O facto proposto é, pois, falso em geral.

□

Resolução 2.45:

1. Tem-se:

$$\begin{array}{rcl} HASH & \cong & AB^{TAM} \\ TAM & \cong & 100 \\ AB & \cong & 1 + arvbin \\ arvbin & \cong & \mathbb{Z} \times INF \times AB \times AB \\ INF & \cong & med \times med \end{array}$$

onde se pode reconhecer, como forma de armazenamento de *sinónimos*, a estrutura *árvore binária*:

$$AB \quad \cong \quad 1 + \mathbb{Z} \times INF \times AB \times AB$$

2. Seja $H : \mathbb{Z} \longrightarrow 100$ a função de 'hashing'. Ter-se-á:

$$\begin{array}{rcl} \phi & : & HASH \longrightarrow 2 \\ \phi(t) & = & \forall i \in TAM : \phi'(i, t(i)) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{rcl} \phi' & : & TAM \times AB \longrightarrow 2 \\ \phi'(i,x) & = & \left\{ \begin{array}{rcl} x = \langle 1, NIL \rangle & \Rightarrow & V \\ x = \langle 2, a \rangle & \Rightarrow & H(\pi_1(a)) = i \wedge \phi'(i, \pi_3(a)) \wedge \phi'(i, \pi_4(a)) \end{array} \right. \end{array}$$

□

Resolução 2.47:

1. Propõe-se:

$$total(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in dom(\sigma)} \begin{array}{ll} let & x = \sigma(i) \\ in & \left\{ \begin{array}{rcl} x = i_1(n) & \Rightarrow & n \\ x = i_2(\sigma') & \Rightarrow & total(sigma') \end{array} \right. \end{array}$$

2. O padrão abstracto de Orc é a equação recursiva

$$X \quad \cong \quad A \hookrightarrow (B + X)$$

— para $A = Item$ e $B = \mathbb{N}$ — que é exactamente o padrão abstracto de FS (2.94), para $A = Id$ e $B = File$. Recordando o Exercício 2.13, é fácil, por inspecção, fazer as associações seguintes:

- *rubricas* corresponde a $files$
- $cats$ corresponde a $dirs$
- $novaSubcat$ corresponde a $mkdir$.

□

Resolução 2.52:

1. Provar ou refutar o primeiro facto:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \text{Por (2.163) e sugestão dada} \\
A \hookrightarrow \phi(\sigma_1 \cup \sigma_2) & \Leftrightarrow & \bigwedge_{x \in dom(\sigma_1 \cup \sigma_2)} \phi(\sigma_1 \cup \sigma_2(x)) \\
 & & \text{por (A.37)} \\
 & \Leftrightarrow & \bigwedge_{x \in (dom(\sigma_1) \cup dom(\sigma_2))} \phi(\sigma_1 \cup \sigma_2(x)) \\
 & & \text{pela associatividade de } \wedge \text{, generalizada} \\
 & \Leftrightarrow & \bigwedge_{x \in dom(\sigma_1)} \phi(\sigma_1 \cup \sigma_2(x)) \wedge \bigwedge_{x \in dom(\sigma_2)} \phi(\sigma_1 \cup \sigma_2(x)) \\
 & & \text{pela definição 1.6} \\
 & \Leftrightarrow & \bigwedge_{x \in dom(\sigma_1)} \phi(\sigma_1(x)) \wedge \bigwedge_{x \in dom(\sigma_2)} \phi(\sigma_2(x)) \\
 & & \text{de volta a (2.163) e sugestão dada} \\
 & \Leftrightarrow & (A \hookrightarrow \phi(\sigma_1)) \wedge (A \hookrightarrow \phi(\sigma_2))
\end{array}
$$

   Fica provado.

2. Provar ou refutar o segundo facto:

$$
\begin{array}{rcl}
A \hookrightarrow \phi(\sigma) & \Rightarrow & A \hookrightarrow \phi(\sigma \setminus S) \\
 & \updownarrow & \text{por (2.163) e sugestão dada} \\
\bigwedge_{x \in dom(\sigma)} \phi(\sigma(x)) & \Rightarrow & \bigwedge_{x \in dom(\sigma \setminus S)} \phi(\sigma \setminus S(x)) \\
 & \updownarrow & \text{por (A.52)} \\
\bigwedge_{x \in dom(\sigma)} \phi(\sigma(x)) & \Rightarrow & \bigwedge_{x \in dom(\sigma) - S} \phi(\sigma(x)) \\
 & \updownarrow & \text{por (A.1), generalizada} \\
 & V &
\end{array}
$$

   Fica provado.

3. Provar ou refutar o terceiro facto: é imediata a prova a partir de (2.163) e (A.5), que é uma equivalência. Fica provado.

4. Provar ou refutar o quarto facto: note-se que, por (2.163), sugestão dada e generalização da conhecida lei de Morgan, se terá:

$$
\neg(A \hookrightarrow \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee_{x \in dom(\sigma)} \neg(\phi(\sigma(x)))
$$

   o que é manifestamente diferente de

$$
\bigwedge_{x \in dom(\sigma)} \neg(\phi(\sigma(x))) \quad \Leftrightarrow \quad A \hookrightarrow (\neg\phi)
$$

   Fica refutado.

□

Resolução 2.53: Sabemos que

$$
\sigma_1 \dagger \sigma_2 = \sigma_1 \setminus dom(\sigma_2) \cup \sigma_2
$$

cf. (A.55). Logo, pelos factos invocados do Exercício 2.52, ter-se-á, sucessivamente:

$$
\begin{array}{rcl}
A \hookrightarrow \phi(\sigma_1 \dagger \sigma_2) & = & A \hookrightarrow \phi(\sigma_1 \setminus dom(\sigma_2) \cup \sigma_2) \\
 & \Leftrightarrow & A \hookrightarrow \phi(\sigma_1 \setminus dom(\sigma_2)) \wedge A \hookrightarrow \phi(\sigma_2) \\
 & \Leftarrow & A \hookrightarrow \phi(\sigma_1) \wedge A \hookrightarrow \phi(\sigma_2)
\end{array}
$$

QED. $\square$

Resolução 2.54: Propõe-se

$$bestSchedule(db) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c} a \\ bestStart(a, db) \end{array} \right)_{a \in dom(db)}$$

onde — sob garantia de ser acíclico o grafo $\#Act \hookrightarrow \pi_4(db)$, recordar Exercício 1.38 — $bestStart$ é a função seguinte:

$$bestStart(a, db) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{ll} let & x = db(a) \\ & D = \pi_4(x) \\ in & \left\{ \begin{array}{lll} D = \{\} & \Rightarrow & 0 \\ D \neq \{\} & \Rightarrow & MAX_{aa \in D \cap dom(db)} bestStart(aa, db) + \pi_2(db(aa)) \end{array} \right. \end{array}$$

Note-se que esta especificação ignora deliberadamente actividades precedentes desconhecidas. O necessário invariante, impondo a propriedade acíclica acima referida, é semelhante ao proposto no Exercício 1.38. $\square$

Resolução 2.59:

1. O raciocínio é o seguinte:
   (a) $\delta = \circ$ pois é o único operador binário;
   (b) daí resulta que os resultados de β e α devam ser relações;
   (c) de $Key \hookrightarrow elems$ inferimos $b \in Key \hookrightarrow Author^\star$;
   (d) logo $a \in 2^{Page \times 2^{Key}}$;
   (e) do exposto resulta $\beta = merge$ e $\alpha = discollect$;
   (f) falta apenas $\gamma = collect$.
2. Propõe-se:

$$\begin{array}{rcl} listByIndex & : & A^\star \times (A \hookrightarrow B) \longrightarrow (A \times B)^\star \\ listByIndex(l, \sigma) & \stackrel{\text{def}}{=} & <\langle a, \sigma(a)\rangle \mid a \leftarrow l \wedge a \in dom(\sigma)> \end{array}$$

   — mas repare-se no comportamento desta função para $dom(\sigma) \subset elems(l)$.
3. Formulação [5]:

$$\begin{array}{ll} (a) & mkAuthorIndex(a, \left(\ \right)) = <> \\ (b) & k \notin dom(b) \Rightarrow mkAuthorIndex(a \cup \{\langle p, \{k\}\rangle\}, b) = mkAuthorIndex(a, b) \end{array}$$

   Prova de (a): Repare-se que, por definição da construção $A \hookrightarrow f$, se tem $Key \hookrightarrow elems(\left(\ \right)) = \left(\ \right)$ levando a $discollect(\left(\ \right)) = \emptyset$. Assim, $merge(a) \circ \emptyset = \emptyset$. Segue-se que $\emptyset^{-1} = \emptyset$ e $collect(\emptyset) = \left(\ \right)$. Segue-se então que $(Str \hookrightarrow NatSort)(\left(\ \right)) = \left(\ \right)$. Finalmente, $StrSort(dom(\left(\ \right))) = <>$, logo

$$listByIndex(<>, \left(\ \right)) = <>$$

   como queríamos.
   Prova de (b): a ideia é mostrar que a relação gerada por δ é a mesma, quer para $mkAuthorIndex(a \cup \{\langle p, \{k\}\rangle\}, b)$, quer para $mkAuthorIndex(a, b)$.
   Da definição de $merge$ decorre uma propriedade que vai ser útil nesta prova,

$$merge(r \cup s) \quad = \quad merge(r) \cup merge(s)$$

   — recordar (2.85). Logo:

$$\begin{array}{rcl} merge(a \cup \{\langle p, \{k\}\rangle\}) & = & merge(a) \cup merge(\{\langle p, \{k\}\rangle\}) \\ & = & merge(a) \cup \{\langle p, k\rangle\} \end{array}$$

[5] Supõem-se as fórmulas universalmente quantificadas.

De (1.46) decorre, então:

$$(merge(a) \cup \{\langle p, \{k\}\rangle\}) \circ x \quad = \quad (merge(a) \circ x) \cup (\{\langle p, k\rangle\} \circ x)$$

onde x abrevia $discollect(Key \hookrightarrow elems(b))$. Mas

$$\begin{aligned} \{\langle p, k\rangle\} \circ x &= \{\langle p, \pi_2(q)\rangle \mid q \in x \wedge k = \pi_1(q)\} \\ &= \emptyset \quad \text{isto se } k \notin 2^{\pi_1}(x) \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} 2^{\pi_1}(x) &= dom(discollect(Key \hookrightarrow elems(b))) \\ &= dom(b) \end{aligned}$$

Logo $k \notin 2^{\pi_1}(x)$ é, afinal, o mesmo que $k \notin dom(b)$ o que faz parte da hipótese. Fica assim completa a prova. QED.

$\square$