Métodos Formais de Programação I +
Opção I - Métodos Formais de Programação I

4.º Ano da LMCC (7007N2) + LESI (5307P2)
Ano Lectivo de 1996/97

Exame (época de recurso) — 11 de Setembro de 1997
14h30
Sala 2301

NB: *sempre que os seus cálculos utilizarem resultados, leis, teoremas* etc. *disponíveis no material pedagógico desta disciplina não os copie para a sua folha de exame — limite-se a citar a sua referência (*e.g. *lei (2.102), exercício 2.15,* etc.*).*

PROVA COM CONSULTA (3 $horas$)

Questão 1 Complete α, β, γ e δ no seguinte diagrama funcional, em SETS,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & A+B \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "m"'] & C+D \arrow[d, "\delta"] & D \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "n"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

por forma a que as seguintes igualdades, implícitas no diagrama, sejam verificadas:

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \alpha &= i_1 \circ f && (1)\\
\gamma \circ \beta &= i_2 \circ g && (2)\\
m &= \delta \circ i_1 && (3)\\
n &= \delta \circ i_2 && (4)
\end{aligned}$$

Justifique formalmente.

Questão 2 Considere o seguinte texto que abrevia e simplifica os requisitos informais colocados por uma empresa comercial a uma empresa informática que a primeira contratou para lhe produzir determinado 'software':

A empresa XYZ LDA. *consta de 3 estabelecimentos ou lojas de comércio, prevendo-se que este número venha a aumentar no futuro.*

A informação associada a cada loja consta de (a) o 'stock' de artigos armazenados ou expostos para venda (cada artigo tem um código próprio); (b) as folhas de vendas.

Existe uma folha de venda por cada dia útil. Cada folha de venda regista as facturas emitidas nas vendas daquele dia. Cada factura indica os artigos vendidos e em que quantidade. As facturas são numeradas e emitidas sequencialmente. Pode haver facturas anuladas.

O sistema a desenvolver deverá prever pelo menos as seguintes operações:

1. *Emissão de factura — seu registo na folha de vendas e simultânea descarga, no 'stock', dos artigos vendidos.*
2. *Aquisição de mais 'stock' para uma dada loja.*
3. *Transferência de segmentos de 'stock' de loja para loja.*

□

1. Construa uma assinatura Σ capaz de captar as espécies e os operadores pretendidos nos requisitos acima.
2. Construa o correspondente modelo, isto é, a Σ-álgebra que, na sua opinião, melhor capta a semântica dos mesmos. Não esqueça eventuais invariantes ou pré-condições. (**Sugestão**: baseie o seu modelo em operações que conhece sobre multi-conjuntos.)

Questão 3 Mostre, através de um contra-exemplo, que o isomorfismo

$$(A^\star)^2 \quad \cong \quad 2^\star \times A^\star$$

é, em geral, falso.

Questão 4 Recorde a função seguinte que extrai, de uma dada sequência l, a sua subsequência de n elementos (ou os que fôr possível extrair) que começa na i-ésima posição:

$$\begin{array}{l}
subl : A^\star \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \to A^\star \\
subl(l,i,n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\
\quad \left\{ \begin{array}{lll}
n = 0 \vee l = <> & \Rightarrow & <> \\
n > 0 \wedge l \neq <> & \Rightarrow & \begin{array}{ll} let & h = head(l) \\ & t = tail(l) \\ in & \left\{ \begin{array}{lll} i = 1 & \Rightarrow & <h> \frown subl(t,i,n-1) \\ i > 1 & \Rightarrow & subl(t,i-1,n) \end{array} \right. \end{array}
\end{array} \right.
\end{array}$$

1. Mostre (*e.g.* por apresentação de um contra-exemplo) que o seguinte facto (suposto universalmente quantificado) <u>não</u> se verifica:

$$length(subl(l,i,n)) \quad = \quad n \tag{5}$$

2. Mostre (*e.g.* por indução em $A^\star$) que o seguinte facto (suposto universalmente quantificado) se verifica:

$$subl(l,i,n+m) \quad = \quad subl(l,i,n) \frown subl(l,i+n,m) \tag{6}$$

Questão 5 Considere o seguinte fragmento de gramática de contexto livre para expressões de aritmética inteira:

$$\begin{array}{rcl}
G & = & \langle NT, T, \langle Exp \rangle, P \rangle \\
NT & = & \{ \langle Exp \rangle, \langle Int \rangle, \langle BinOp \rangle \} \\
T & = & \{ \texttt{+}\,,\, \texttt{-}\,,\, \texttt{*}\,,\, \texttt{/}\,,\, \texttt{(}\,,\, \texttt{)}\,, \ldots, \texttt{-2}\,,\, \texttt{-1}\,,\, \texttt{0}\,,\, \texttt{1}\,,\, \texttt{2}\,, \ldots \} \\
P & = & \left\{ \begin{array}{rcl}
\langle Exp \rangle & ::= & \langle Int \rangle \mid \texttt{(}\ \langle Exp \rangle\ \texttt{)} \mid \langle Exp \rangle \langle BinOp \rangle \langle Exp \rangle \\
\langle Int \rangle & ::= & \ldots \mid \texttt{-2} \mid \texttt{-1} \mid \texttt{0} \mid \texttt{1} \mid \texttt{2} \mid \ldots \\
\langle BinOp \rangle & ::= & \texttt{+} \mid \texttt{-} \mid \texttt{*} \mid \texttt{/}
\end{array} \right.
\end{array}$$

Recorde o método que estudou para representação de uma qualquer gramática $G = \langle N, T, S, P \rangle$, expressa em BNF, num sistema de equações em SETS: (1) começa-se por eliminar todas as ocorrências de símbolos terminais nas produções em P; (2) a cada produção do BNF corresponde uma equação em SETS; (3) a cada símbolo não-terminal $\langle A \rangle$ em N corresponde a variável A em SETS; (4) usa-se a seguinte tabela de conversão de BNF em SETS:

BNF		SETS
$\alpha \mid \beta$	$\mapsto$	$\alpha + \beta$
$\alpha\ \beta$	$\mapsto$	$\alpha \times \beta$
α^*	$\mapsto$	α^*
α^+	$\mapsto$	$\alpha \times \alpha^*$
ϵ	$\mapsto$	1

1. Mostre que, recorrendo a este método e ao cálculo de isomorfismo de SETS, se obtém da gramática dada uma única equação $Exp \cong \mathcal{F}(Exp)$, onde $\mathcal{F}$ é uma expressão polinomial do 2.º grau. (**Sugestão**: faça $Int \cong \mathbb{Z}_0$.)
2. Enuncie o método de indução polinomial associado a $Exp \cong \mathcal{F}(Exp)$ e, sobre o respectivo esquema algorítmico polinomial, especifique a função

$$\begin{array}{rcl} eval & : & Exp \longrightarrow \mathbb{Z}_0 \\ eval(e) & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & \ldots \end{array}$$

/* *calcula o valor em* $\mathbb{Z}_0$ *da expressão e; o terminal " / " deverá ser interpretado como o operador de divisão inteira* */

Questão 6 Considere a seguinte função recursiva, escrita em notação SETS,

$$g \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 + f \times g$$

onde se assume a existência da função $f : A \longrightarrow B$.

1. Re-escreva g em notação funcional clássica e tipifique-a, isto é, complete as reticências em

$$\begin{array}{rcl} g & : & \cdots \longrightarrow \cdots \\ g(x) & \stackrel{\mathrm{def}}{=} & \left\{ \begin{array}{lcl} \cdots & \Rightarrow & \cdots \\ \cdots & \Rightarrow & \cdots \end{array} \right. \end{array}$$

2. Encontra alguma relação entre g e $f^\star$? Na afirmativa, caracterize-a adequadamente.
